

colorchecker CLASSIC
x-rite
mm

MÉCANIQUE

COSMOGRAPHIE

DESCRIPTIVE

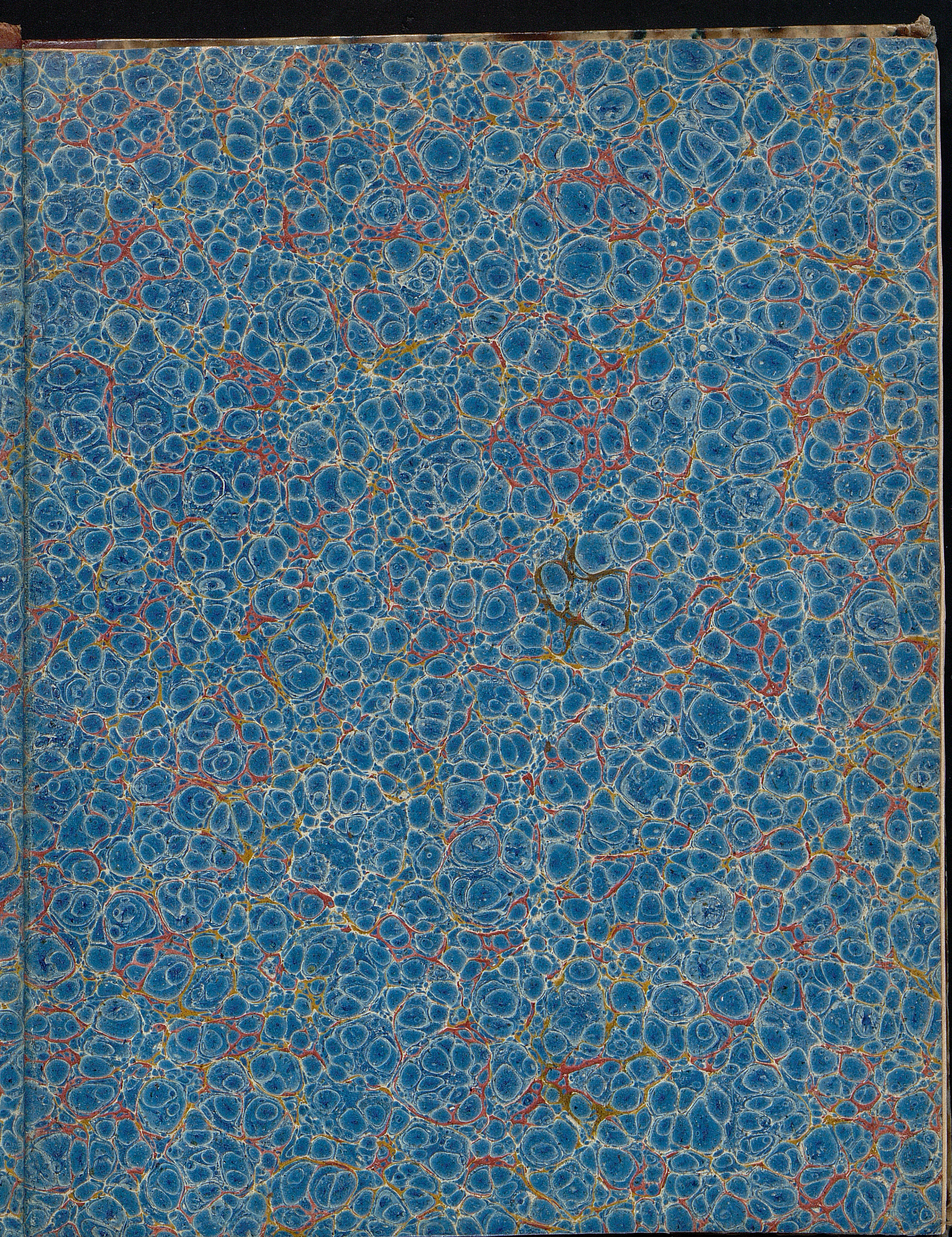
ÉCOLE

NORMALE

IQUE
APHIE
CTIVE

LE
ALE





1r



1r

Programme

du Cours d'Analyse

N°1

Cours d'astronomie.

La droite qui joint le point de croisement des fils au centre optique de l'objectif est ce qu'on nomme l'axe optique de la lunette. — Quand un point lumineux forme son image au point de croisement, c'est que ce point se trouve dans la direction de l'axe optique de la lunette. —

~~Instrument~~ Pourvu d'une lunette ainsi construite, et la mouvant sur un limbe gradué, on pourra mesurer l'angle de deux objets. —

Une lunette peut encore servir a determiner le moment precis ou un objet passe dans un plan déterminé. Ce sont les deux principaux usages des lunettes. —

Observations — La simple observation du ciel montre que les étoiles se deplacent graduellement, en conservant leur meme de posit. relative; elles semblent se mouvoir comme le soleil de l'orient vers l'occident mais non pas toutes avec la meme vitesse. Il y en a meme qui ne paraissent pas se deplacer. (étoiles polaires). Les étoiles voisines de celles là semblent decrire des cercles autour d'elles; il en est de meme des étoiles plus eloignées, qui decrivent un cercle non entierement visible pour nous. — De plus si on se deplace a la surface de la terre de quantités considér., les dispositions mutuelles des étoiles ne changent pas, ce qui indique que les étoiles sont a une distance de la terre beaucoup plus grande que les dimensions terrestres. —

Nous sommes portés a regarder les étoiles comme attachées a une sphère dont l'observateur est le centre, car les étoiles semblent etre toutes a la meme distance. du reste on peut toujours imaginer une pareille sphère. — La partie de la sphere que nous voyons pendant le jour, est parsemée d'étoiles comme celle que nous voyons la nuit. —

La sphere que nous voy. dans la nuit a une certaine epoque est vue pend. le jour six mois après. —

Les étoiles conservent leurs mem. distances relatives. — Il y a des exceptions; le soleil et la lune ne restent pas toujours la meme place par rapport aux étoiles; il y a les planetes qui se deplacent aussi par rapport aux étoiles. Les étoiles sont appelées *étoiles fixes*.

Le mouvement de la sphère céleste peut être considéré comme se faisant tout d'une pièce, comme il y a un point immobile, et que le centre est immobile, le mouv. sera un mouvement de rotation autour du diamètre passant par le point immobile. — Ce n'est qu'une 1re approximat.

admett. qu'il en soit rigoureusement ainsi; et que le mouv. de rotation soit uniforme —; nous pourr. vérif. les lois au moyen des observations

On appelle verticale la direct. du fil à plomb. —

le plan perpend. est l'horizon. —; c'est aussi le grand cercle de la sphère déterminé par ce plan. — zenith — pôle de la sphère céleste, axe de la sphère — L'un des pôles est situé pour nous au dessus de l'horiz. c'est le pôle boréal; — un plan vertical passant par l'axe de la sphère céleste est le plan méridien du lieu de l'observation; la trace horizontale de ce plan méridien est la ligne méridienne. la direct. de cette ligne du côté donne la direct. du nord. —

la direct. horizontale perpendiculaire à la lig. méridienne donne l'est et l'ouest —

Vérif. les lois du mouv. diurne. — il suit du mouv. diurne que chaque étoile décrit un petit cercle; les petits cercl. sont décrits dans un même temps; donc tout plan passant par l'axe divise chaq. petit cercle en 2 parts égales qui doivent être parcourues dans des temps égaux; il en sera ainsi pour le pl. mérid. — Donc on pourra déterm. un plan vertical partag. les petits cercl. des étoil. en 2 parties parcourues dans des temps égaux. — et s'il est déterminé pour une étoile, il le sera pour toutes. —

Pour cela on se sert de la lunette méridienne. — Lunette se mouvant autour d'un axe perpendiculaire à la lunette. —

L'axe doit être parfaitement horizontal; on s'en assure au moyen d'un niveau suspendu à l'aide de deux crochets. —

il faut que l'axe optique de la lunette décrive un plan vertical; voyons comment cette condition pourra être remplie. — on vise avec la lunette un objet terrestre situé à une grande distance, et à peu près dans le plan horiz. du lieu de l'observation. — Suppos. que l'axe optique ne soit pas perpend. à l'axe des cylindres, on retourne la lunette de manière que les cylindres reposent sur les autres tourillons. alors l'objet ne se trouvera pas dans l'axe optique de la lunette; — il faut changer le point de croisement des fils; ~~on peut ne~~ si on déplace le point de croisement, on pourra rendre l'axe optique exact. perpendiculaire à l'axe des supports; — on arrivera à cette exactitude par une suite de tâtonnements. —

L'ensemble du réticule peut se mouvoir de manière à être amené au foyer de l'objectif. —, il est susceptible aussi de se mouvoir circulairement dans son plan, de manière à ce qu'un des fils soit parfaitement horizontal. —

Supp. dans l'axe optique de la lunette perpend. à l'axe des supports. si le plan vertical décrit par cet axe était le plan méridien, si on observe une étoile dont on voit le cercle tout entier, on verra cette étoile passer deux fois dans le vertical décrit par la lunette, laquelle étoile viendra se placer au point de croisement. — l'horloge indiquera le moment précis: observ. un passage supérieur, puis un passage inférieur, puis un passage supérieur. — le temps écoulé entre le 1er et le 2e passage, sera égal à celui écoulé entre le 2e et le 3e. — or cela n'arrivera pas du 1er coup; on trouvera des intervalles de temps inégaux, pour les rendre égaux, on fait mouvoir l'axe des supports de la lunette, jusqu'à ce que les intervalles de temps soient égaux. — alors le vertical de la lunette est le plan méridien.

Si le ... du mouv. diurne est exact, cela étant fait pour une étoile, l'observat. précédente servira pour toutes les autres, c'est précisément ce qui arrive pour une étoile quelconque. — pour celles dont on voit le cercle entièrement, on vérifie que l'intervalle entre 2 passages supérieurs est rigoureusement constant. —

Pour conserver la direct. du plan méridien, on dispose à une grande distance une mire coïncidant exactement avec le point de croisement, la direction de cette ligne donne la ligne méridienne. —

La lunette mérid. sert encore à déterminer la durée d'une révolution de la sphère céleste, appelée <u>révolution sidérale</u>.

Si les lois admises sont exactes, au moment du passage supérieur d'une étoile au méridien, sa distance au zénith en sera facile à calculer.

Soit P le pole, S l'étoile au moment de son passage au méridien. —

on a evid. $ZS = ZP - PS$. —

Soit l'étoile en S' au mom. de son passage inférieur.

on aura $ZS' = ZP + PS' = ZP + PS$. Car $PS = PS'$!

Donc $ZS + ZS' = 2ZP$.

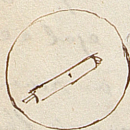
Ce qui donne la distance du pole au zénith; comme le pole est dans le méridien, la position du pole est complètement déterminée —

on déduira de là PS. —

Comment mesurer la dist. zénith. d'une étoile au moment de son passage au méridien. —

<u>Mural.</u>

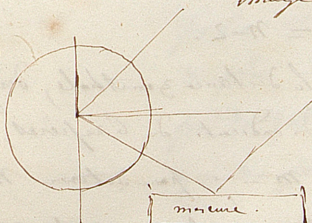
Mural — Cet instr. se compose d'un cercle divisé vertical, mobile autour d'un axe horizontal dont les supports sont fixés à une muraille. — Le plan de ce cercle doit être rendu parallèle au plan du méridien, et porte fixée à son centre une lunette, qu'il emporte avec lui en tournant autour de son axe. Cette lunette porte au foyer de l'obj. deux fils croisés l'axe optique de la lunette doit être rendu parallèle au plan du cercle — Ce cercle est renfermé lui même dans un anneau circulaire fixe qui porte plusieurs points de repère; pour apprécier la divis. du cercle à laquelle correspond le repère, celui-ci est muni d'un vernier, et on examine le tout au moyen d'un microscope scellé dans la muraille qui supporte l'instrument. Le cercle mural a de grandes dimensions, afin que les divisions soient plus multipliées. —



Suppos. les conditions précédentes remplies. — Concevons qu'on rende l'axe optique de la lunette exactement vertical, en tournant le cercle, alors le zéro du repère coincid. avec une division de l'instrument, soit m cette division # maintenant on fait tourner le cercle d'un angle égal à la distance zénith. de l'étoile qu'on veut observer. — alors le zéro du vernier coincidera

a la division m+z. dans z serait la distance zénithale de l'étoile. Si donc m était connu, il serait facile d'avoir z, qu'on ferait tourner le cercle de manière à observer l'étoile au moment de son passage au méridien. - Soit m+z = n. on aura z = n-m. le nombre constant m est ce qu'on appelle l'erreur de collimation. -

Il faut déterminer le nombre m. - on pourrait y parvenir si on savait qu'une étoile passe exactement au zénith. - autre moyen. on dirige la lunette vers l'étoile et vers son image réfléchie par un plan parfaitement horizontal. - Les dist. zénith. de l'étoile et de son image sont deux angles supplémentaires l'un de l'autre. - si l'un est



z l'autre sera 180-z. - supposons que la lunette étant dirigée vers S, le zéro du vernier coïncide avec une division n.; et que la lunette étant dirigée vers l'image le zéro coïncide avec la divis. n'. -

on aura $n = z + m$
$n' = 180 - z + m$.

d'où $m = \frac{n+n'}{2} - 90°$ -

le nombre m est ainsi connu.

Observat. - nous avons supposé que S était dans le méridien, et qu'au moment où l'on observait l'image, S avait conservé la même posit. or, au moment de la seconde observation, z a changé; pour éviter cela, on fait la 1re observat. avant le passage au méridien, et la 2e observation après le passage au méridien. de telle sorte que le passage au méridien divise les deux époques en deux parties égales. - il n'y a pas d'erreur sensible sur les distances zénithales; car l'étoile au moment de son passage au méridien décrit une ligne sensibl. horizontal. -

Nous avons supposé qu'il n'y avait qu'un seul repère; mais il y en a plusieurs afin de corriger les erreurs de graduation du cercle. il y en a 6., accompag. chacun d'un vernier; le zéro du vernier est le repère. -

5v

Suppos. cercle tourné et la lunette vertical —

Soit m_1, m_2 — m_6 — les division du cercle correspond. aux repères — on aurait $$\frac{m_1 + m_2 + \dots m_6}{6} = m$$

ce nombre n'est pas connu; suppos. le connu — pour l'étoile; la lunette tourne d'un angle z — les repèr. correspondront aux divisions

$$m_1 + z, \quad m_2 + z \; - \; - \quad m_6 + z$$

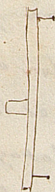
prenons la moyenne qui est

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_6 + 6z}{6} = n.$$

ou $$n = m + z. \quad d'où \quad m = n - z.$$

si donc m était déterm. pour avoir la distance zénithale, diriger la lunette vers l'astre, prendre la moyenne des indicat. des 6 repères, et retrancher de cette moyenne le nombre constant m —; pour déterm. m on ferait comme il a été indiqué dans le cas où il n'y avait qu'un seul repère. —

On sait rendre un cercle exact. perpend. à un axe. — Nous admett. que le mural est perpendicul. à l'axe autour duquel il tourne pour rendre le cercle vertical, on fixe aux 2 extr. d'un diamètre deux pointes, portant 2 traits à des distances égal. du limbe; un fil à plomb qui s'applique contre le 1er trait doit venir battre contre le second, si le cercle est vertical; et réciproq. si cela a lieu le cercle est vertical. alors l'axe du cercle sera horizontal —



Il faut maintenant que le plan du cercle coïncide avec le plan du méridien et que l'axe opt. de la lunette soit parall. au pl. du limbe; ces deux vérificat. se font en même temps. — si ces condit. sont remplies, l'axe optique de la lunette ne se déplace que dans le plan méridien. or ~~la connaît~~ il faut qu'une étoile passe au même instant au point de crois. des fils de la lunette et au point de croisement des fils de la lunette méridienne — l'axe optique de cette lunette est alors dans le plan du méridien —

Cette seule observat. ne suffit pas ; car si l'ax optique n'est pas parallèle au plan du limbe, quand on visera une autre étoile, l'ax optique décrira un cone de revolut. autour de l'ax du cercle ; et l'étoile ne passera plus en même temps au point de croisement des fils de la lunette du mural, et à celui de la lunette meridienne. — Si l'observat. a été faite pour deux etoil. situé a des hauteurs différentes au dessus de l'horyzon, ~~lettre~~ la simultanéité de passage a lieu pour deux etoil. differentes, l'axe optique est parallèle au plan du limbe (car l'axe se reduit à un plan) ; et le limbe est parallèle au meridien, puisque l'ax optique dans les deux position est situé dans le plan meridien. — Si la condit. n'est pas remplie, en derangeant les fils, en derangeant l'axe un peu, on parviendra par des tatonnements a rendre l'axe optiq. parallèle au plan du limbe, qui sera parallèle lui meme au plan meridien. —

On pourra vérifier ainsi rigoureusem. une des consequence du mouvement diurne tel que nous l'avons admis. —

On peut trouver les distance zénithales des différentes étoiles, ainsi que les distance polaires des mems étoiles. —

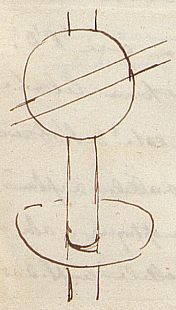
Si ~~Quand~~ l'étoile n'a qu'un seul passage au méridien lorsqu'on connait la distance zenithal du pole, on peut trouver la distance polaire. —

Les observat. precedent. doivent etre corrigés de la refraction.

~~proprement~~ Il nous reste comme consequence du mouvement diurne à démontrer que l'étoile reste toujours à la même distance du pole. —

Cercle entier

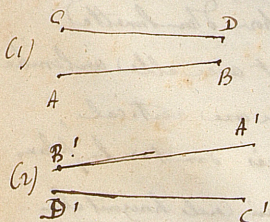
La détermination de la position d'une étoile peut se faire au moyen d'un cercle entier. — Cet instrument se compose d'une lunette qui peut tourner dans un plan vertical, en entrainant avec elle un limbe gradué. Le tout peut tourner en outre avec un axe vertical, de manière que la lunette et le limbe peuvent être placés dans tous les plans verticaux possibles. — L'axe vertical supporte encore un cercle horizontal qu'il entraine avec lui. Le tout est solidement fixé. —



le cercle vertical est entouré d'une couronne circulaire fixée à l'axe, ma[is]
qui n'a pas de mouvement sur elle même; sur cette couronne circulaire se
trouve un repère, qui sert à voir de combien le limbe a tourné sur
lui même. — ~~de ma~~ Le cercle horizontal qui tourne avec l'axe, est enchass[é]
de même dans une couronne circulaire fixe, qui porte un ou plusieurs
points de repère. — on peut viser un astre dans une position qlq avec
pareil instrument. — la lunette étant dirigée sur l'astre, on en déduit
la distance zénithale de l'étoile (les obs. sont les mêmes que pour le mural
correction etc) — il faut ensuite déterminer l'azimuth de l'étoile, c'est
à dire l'angle que le vertical de l'astre fait avec le plan du méridien. —
pour cela il faut savoir à quelle division du cercle horizontal correspond l[e]
zéro du vernier pour que la lunette soit dans le plan du méridien. et p[our]
cela on vise au même instant l'étoile avec la lunette de l'instrument et avec la lunette
méridienne.

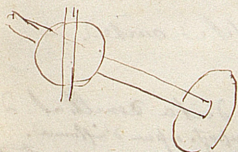
précaution à prendre. — l'instrument doit être vertical; on s'en
assure au moyen du fil aplomb absolument comme pour le mural; — [x]
il faut s'assurer aussi que l'axe est vertical; ce que l'on fait en faisant tourn[er]
autour de l'axe le limbe; — et le fil aplomb doit toujours battre exacte[ment]
contre les mêmes traits. — L'axe étant vertical le cercle horizontal l[e]
est horizontal — l'axe optique de la lunette doit être parallèle au
plan du limbe; — pour cela on dirige la lunette vers un objet assez
éloigné; puis on fera tourner l'instrument de 180° autour de son axe — alors il faudra que
l'axe optique de la lunette soit de nouveau dirigé vers l'objet.
pour nous rendre compte de ~~l'instrument~~ cela, faisons une coupe horizontale d[e]
l'instrument, passant par la lunette, que nous supposerons horizontale. soi[t]
AB l'axe optique de la lunette, CD l'intersection du plan du limbe avec l[e]
plan perpendiculaire. — à cet instant faisons tourner l'instrument de 180° autour d[e]
son axe; on aura la position (2). la ligne CD se confondra avec C'D'.
maintenant l'oculaire de la lunette est en A' et l'objectif en B'. on fait tourner le limbe
sur lui même de 180°; de manière à ramener l'oculaire du côté de l'observat[eur]
si les choses sont comme la figure, l'axe optique n'étant pas parallèle au plan du
limbe l'objet ne sera plus dans la 2e position dans la direct. de l'axe optique. alors on
déplacera un peu l'axe optique, et par tâtonnement on le rendra parallèle au pl. du lim[be]

[x] pour cela sur deux tiges perpendicul. au limbe sont tracés deux traits a, b situés à égale distance du limbe. le fil aplomb doit battre constamment contre les deux traits. —



voyons comment on peut se servir de cet instrument. Soit P le pôle — Z le zénith — S l'étoile. soit ZPS = a. l'horloge donne le temps h qui s'est écoulé depuis le moment du passage au méridien : — si les lois du mouvement diurne sont exactes, on peut calculer z et a d'une autre manière. — soit SP = δ. c'est une quantité qu'on détermine avec le mural; de même ZP est connue au moyen du mural; du temps h on peut déduire l'angle ZPS : on a $ZPS : 2\pi :: h : 24$ — d'où $ZPS = \frac{\pi h}{12}$; dans SPZ, on connait 2 côtés et l'angle compris; on peut donc calculer z et a; et voir si les valeurs obtenues ainsi sont les mêmes que celles données directement par l'observation. — Ceci a lieu; donc les lois du mouvement diurne sont parfaitement exactes. —

Équatorial



Le limbe parallèle à l'axe porte une lunette qui peut décrire un plan parallèle au plan du limbe. — le cercle perpend. à l'axe est enchâssé dans une couronne circulaire fixe, qui porte plusieurs points de repère.

Il y a un autre instrument au moyen duquel on pourrait vérifier les lois du mouvement diurne. C'est l'équatorial; l'axe est parallèle à l'axe du monde, — cet axe supporte deux cercles, l'un qui lui est parallèle l'autre qui lui est perpendiculaire. — La lunette étant dirigée vers une étoile, et étant fixée au limbe, ne pourra plus décrire qu'un cône de révolution autour de l'axe. et on pourra s'assurer que l'étoile étant vue dans une position, elle pourra être vue dans toutes les autres positions — de plus on verra que l'angle dont il faut faire tourner l'axe pour voir l'étoile dans deux positions différentes est proportionnel à l'intervalle de temps que l'étoile a mis pour aller d'une position à l'autre —

Définition. plan horaire, angle horaire.

À chaque instant on peut concevoir un plan passant par une étoile et l'axe de la sphère; c'est le plan horaire de l'étoile — l'angle que ce plan fait avec le méridien est l'angle horaire de l'étoile. l'angle horaire d'une étoile est variable, — on nomme ascension droite de l'étoile, l'angle que son plan horaire fait avec un plan horaire pris pour origine; l'ascension droite se compte de 0 à 360, de l'ouest à l'est, en sens contraire du mouvement diurne. — Le plan fixe est celui qui passe par l'axe du monde et l'équinoxe du printemps. —

ascension droite

7v

Quand on connait l'heure de passage au méridien d'une étoile, et l'heure de passage d'une étoile prise pour origine, on en déduit l'ascension droite d'une étoile — si entre ces deux passages il s'est écoulé h, l'on a donné par $\alpha : 24 :: h : 24$ d'où $\alpha = h . 15^o$.

L'ascension droite d'une étoile étant connue, pour avoir celle d'une seconde, il suffira de connaître l'intervalle de temps compris entre les passages de ces 2 étoiles au méridien. —

La declinaison d'une étoile est le complement de sa distance polaire; elle se compte de 0° à 90°. on indique si elle est boréale ou australe —

L'ascens. droite et la declinaison sont les coordonnées d'une étoile sur la sphère céleste.

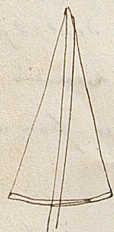
(Ces differents élements ne sont pas complet. invariables; nous verrons cela plus tard. + — un catalogue d'étoiles contenus actuellement deviendrait complet. fautif dans quelq. milli. d'années.

Constellations. — grande ourse. petite ourse. —

Il est important de déterminer l'exact. les dist. zenithal. des étoiles qui sont très près du zénith. et pour lesquelles la refract. a peu d'influence. — pour cela on a un secteur zénithal — On a un arc d'un petit nombre de degrés, et d'un très grand rayon; cet instrument est muni d'une lunette.(1) — il peut tourner autour d'un axe vertical — on doit s'assurer que le limbe est vertical, au moyen du fil aplomb.(2) il faut s'assurer que l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe on s'en assure au moment de passage d'une étoile au zénith. on doit voir l'étoile au zenith au même instant qu'on la voit avec la lunette méridienne.

Si le zéro du vernier coincidait avec le zéro du limbe quand l'axe optique de la lunette est vertical, il serait facile d'avoir les distances zenithales des étoiles. Mais cette coincidence n'a pas lieu généralement. Il en resulte une erreur de collimation qu'il faut determiner. L'axe optiq. de la lunette étant vertical, suppos. que le zero du vernier corresponde à la division α du limbe, que nous ne connaissons pas. (Suppos. le zéro du limbe à gauche de celui du vernier. on n'en sait rien d'avance). Si on vise une étoile dirigée vers le nord, on aura la distance zenithale diminuée de α

Secteur zénithal



(1) La lunette peut tourner autour du centre de l'instrument, elle entraine avec elle un vernier qui parcourt la division du limbe.

(2). on s'assure aussi que l'axe est vertical, en faisant tourner le secteur autour de l'axe vertical. —

on aura $\xi = Z - \alpha$. Si on fait tourner l'instrument de 180°, puis qu'on vise la même étoile, alors la distance zénithale ξ' qu'il indiquera sera $\xi' = Z + \alpha$. on aura $\alpha = \frac{\xi' - \xi}{2}$. —



Quart de cercle mural — Le quart de cercle est fixe; il n'a de mouvement que la lunette; le plan du limbe doit être vertical, et coïncider avec le plan du méridien, ce dont on s'assure en constatant qu'une étoile se trouve en même temps dans la lunette du mural, et dans la lunette méridienne. Si on fait cela pour deux étoiles différentes, on s'assure en outre que l'axe optique de la lunette est parallèle au plan du limbe. La lunette tourne autour de son centre, et entraîne avec elle un vernier. L'erreur de collimation ne peut pas s'obtenir par le retournement. Mais on pourra comparer les indications que donnent l'instrument avec celles que donne un secteur zénithal pour lequel on connaît l'erreur de collimation. on en déduira l'erreur de collimation pour le quart de cercle mural. —



On emploie aussi le quart de cercle mobile et portatif. — C'est un quart de cercle semblable au précédent et qui est porté par un axe vertical autour duquel il peut tourner. On s'assure que le limbe est vertical, qu'il en est de même de l'axe, ce qui sera si dans le mouvement de rotation il ne cesse pas de battre contre les deux mêmes traits. Il faut ensuite que le plan du limbe soit parallèle au méridien, et que l'axe optique de la lunette soit parallèle au plan du limbe. on emploie le procédé déjà indiqué. — L'erreur de collimation peut se déterminer par le retournement, pour cela le quart de cercle est prolongé d'un peu au delà de la verticale. —

Cet instrument peut être employé à déterminer l'heure du passage d'une étoile au méridien. Observons une étoile dans un certain plan, soit h. le moment où l'étoile est dans l'axe optique de la lunette. on fixe la lunette au limbe. l'étoile continue sa marche et, après avoir passé au méridien, s'abaisse; il y aura un moment où l'on pourra la revoir avec l'instrument soit h'. le moment. alors $\frac{h+h'}{2}$ sera

l'heure de passage de l'etoile au meridien. Connaissant l'heure du passage au méridien d'une certaine etoile, il sera facile de mettre le plan du limbe dans le meridien, sans avoir besoin de lunette meri[dienne]. Cette methode s'appelle <u>methode des hauteurs correspondantes</u>.

Cercle repetiteur

Cercle repetiteur. on l'emploie a la determ. des dist. zenith. des etoiles et a la deter. de l'angle compris entre deux objets.

Pour ce dernier but il suffirait d'avoir un limbe qui put se placer dans tous les plans possibles; au moyen du cercle repetiteur on peut avoir un multiple de l'angle cherché, sans que l'erreur qui en résulte soit plus grande que si on mesurait un seul angle; alors si α est l'erreur commise sur le multiple de l'angle, $\frac{\alpha}{n}$ sera l'erreur commise sur l'angle ~~[illegible]~~ cherché.

Voy. d'abord grossierement de quoi se compose l'instrument; il se compose d'un cercle mobile autour d'un axe ~~mobile~~ perpend. a sa direction; cet axe traverse un essieu qui lui est perpendicul. et horizont. Cet essieu est lui même soutenu par 2 traverses verticales; ces deux traverses sont réunies par une traverse horizontale, laquelle est soutenue par un pied vertical; ce pied supporte ce cercle divisé, qu'il entraine avec lui dans ses mouvements. Le cercle est enchassé dans une couronne circulaire fixée a l'axe; il entraine avec lui une lunette c'est la lunette supérieure. Au dessous se trouve une lunette infer[ieure] qui ne passe pas par le centre du cercle, a cause de l'axe qui l'en empeche. On peut alors amener le plan du cercle superieur parallele a tel plan qu'on voudra, en faisant tourner le cercle autour de l'essieu, puis autour de son pied. Ce pied lui-même est supporté par trois pieds munis de vis qui servent a rendre le pied vertical. On peut faire tourner chaque lunette séparement; puis les deux lunettes etant fixes, on peut faire tourner sur lui même le système du limbe et des deux lunettes.

Cours d'astronomie

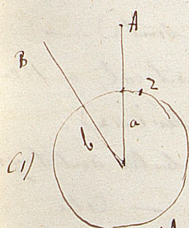
Voyons comment on peut mesurer l'angle de deux objets. on met la lunette superieure au zero, le zero de l'alidade du vernier coincide avec le zero du cercle gradué. puis on amene le plan du limbe a coincider avec le plan des 2 rayons visuels menés aux deux objets. on y arrive par tatonnement, supposons que cela soit a peu près ainsi; il faut s'assurer que les axes optiques des lunettes peuvent être amenés a passer par respectivement par chaque objet. — on fait tourner la lunette superieure avec le limbe afin de ne pas deranger la coincidence du zero du vernier et du zero du limbe, et on amene son axe optique a passer par le 1er objet. on fait ensuite

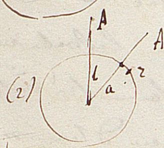
Supp. cela fait. — la lunette super. est au zero, dirigée sur un des objets. — puis l'autre lunette est dirigée sur l'autre objet. —

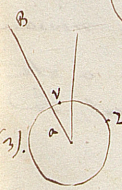
Supp. que le papier soit le plan des deux objets AB.

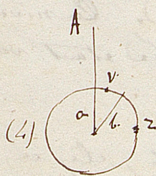
soit a la lunette superieure, b la lunette inferieure — soit en z le zero du vernier. on fait tourner tout l'appareil de maniere à amener b dans la direction A. fig. (2). on detache la lunette superieure, et le cercle devenu restant fixe, on ramene la lunette superieure vers l'objet B. fig (3). le zero du vernier arrive en v. l'angle zv donne le double de l'angle demandé. —

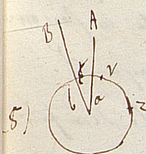
fait tout tourner, et ramener a vers A. fig (4). on detache la lunette b. et on la ramene sur B. on a fig. (5). fait tout tourner et ramener b vers A. fig (6). ramener a vers B. fig. (7). et l'angle zv' est egal a 4 fois l'angle cherché! — la fig. (7) offre la meme disposition que la fig. (3) — on continuera ainsi — il n'y a que deux erreurs de lecture, celle du commencement et celle de la fin.

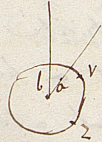


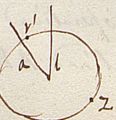












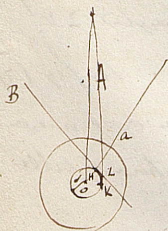
3 v

Il y a des erreurs de pointé mais ces erreurs se compensent entre elles car elles sont les unes dans un sens, les autres dans l'autre sens. —

On peut mesurer la distance zénithale des étoiles avec cet instrument. La lunette inférieure ne sert plus, — il faut rendre le pied vertical, et le plan du limbe vertical.. On amène la lunette au zéro.. on amène le vertical du limbe dans le plan vertical qui contient l'étoile. On amène la lunette sur l'étoile, en faisant tourner le limbe et la lunette tout d'une pièce. On retourne l'instrument de 180° autour de son pied. On fait tourner la lunette sur son limbe, et on amène la lunette sur l'étoile. On a ainsi le double de la distance zénithale cherchée. On fait tourner de 180°. On fait tourner le limbe et la lunette de manière à ramener la lunette vers l'étoile, on fait tourner le limbe de 180 et puis on fait tourner seulement la lunette, on a le quadruple de la distance demandée. et ainsi de suite —

Précaut. à prendre. Le pied doit être vertical; on s'en assure au moyen d'un niveau fixé à la lunette inférieure. En faisant tourner l'instrument autour de son pied, la bulle doit toujours s'arrêter aux mêmes divisions, si le pied est vertical. — Cette vérif. est importante. x Il faut ensuite rendre le limbe vertical. Ceci est moins important, car on opérerait dans un plan très voisin du plan vertical — on le rend vertical au moyen d'un niveau fixé perpendiculairement au plan du limbe. Ce niveau a été réglé une fois et il en résulte que le limbe étant vertical, la bulle occupe le milieu du niveau. —

x. Si le pied était incliné de α, comme on considère le pied comme allant passer au zénith, la distance zénithale serait altérée d'une quantité égale à α. —



Dans la mesure des angles de deux objets, il y a une correct. à faire, provenant de l'excentricité de la lunette inférieure. L'ax. opt. de la lunette infér. reste tangent à un cercle de rayon r. Dans la 1 première opération l'instrument a tourné de l'angle compris entre les deux tangentes, BLA ; car dans la 2e opération on amène la lunette b dans la direction de A ou dans la direction AK. alors la

lunette supérieure a pris la position Oa. de telle sorte que $AOa = BIA$. on ramène la lunette supérieure vers B ; et on prend BOa pour le double de ~~la distance~~ l'angle cherché. or

l'angle $BOa = BOA + AOa = x + BIA$.

les triang. BOM et AIM ont un angle opposé par le sommet.

donc
$$BOA \text{ ou } x + B = BIA + A.$$

d'où
$$BIA = x + B - A. \quad \text{donc}$$

$$BOa \text{ ou } 2x' \text{ est l'angle qu'on lit — on a donc}$$

$$2x' = 2x + B - A. \quad \text{d'où} \quad x = x' + \frac{A-B}{2}.$$

or il est facile de calculer cette correct. quand on connait la distance des objets au lieu de l'observation. on aurait

$$x = x' + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right).$$

si les deux objets étaient à égal distance, la correction est nulle ; il en est de même si les objets peuvent être regardés comme à une distance infinie.

Le théodolite sert à mesurer l'angle compris entre les plans verticaux passant par l'observateur et deux objets quelconques. il sert aussi à déterminer les distances zénithales. — il remplit le même objet que le cercle entier. — il se compose d'un cercle vertical et d'un cercle horizontal — pour chaque mesure on peut employer la répétition. cet instrument est porté par un pied qui doit être exactement vertical. On assure la fixité de l'instr. en le faisant reposer par 3 vis calantes sur trois disques en cuivre munis de pointes qui retiennent sur la table où l'instrument.

Il faut d'abord rendre l'axe vertical. ; à cet effet se trouve disposé un niveau à bulle d'air ; quand l'instrument tourne autour de son pied, le niveau doit décrire une surface conique, et la bulle doit toujours correspondre aux mêmes divisions du niveau puisqu'il décrit un cône de révol. dont l'axe est vertical. on fait l'expérience pour deux plans différents — cela suffit. —

Le limbe doit être vertical ; on se sert pour cela d'un niveau qui se place sur l'axe du cercle vertical : ce niveau a été réglé de telle sorte que la bulle est au milieu du niveau quand l'axe du limbe est horizontal, et par cons. le limbe vertical ce niveau a été réglé au moyen du fil à plomb comme il a été dit. —

Ainsi des 2 pl. vert. passant par l'obj. et par le lieu de l'obs. on amène le zéro du cercle horizontal à coïncider avec le zéro du vernier. puis on fait tout tourner× de manière à amener le plan du limbe dans le plan vertical de l'un des deux objets, à peu près ; puis au moyen de la lunette du limbe, on l'y amène exactement. il faut que le plan du limbe contienne le 2d pl. vertical. — pour cela on laisse fixe le cercle extérieur, et on fait tourner l'appareil qui entraîne seulement le cercle horizontal intérieur — l'angle dont a tourné le vernier est précisément l'angle des deux plans verticaux

~~× le cercle horizontal se compose de deux cercl.~~

— on peut avoir un multiple de cet angle. pour cela on fait tourner ensemble le cercle int. et le cercle extérieur, de manière que le plan du limbe contienne le premier objet. puis on ne fait tourner que le cercle extérieur, de manière à amener le plan du limbe dans le plan vertical du 2e objet, alors le zéro du vernier a parcouru : a parcouru encore un angle égal à l'angle cherché ; et en tout il a parcouru un angle double de l'angle cherché et ainsi de suite.

Cours d'astronomie. —

On peut à l'aide de cet instrument déterminer la distance zénithale d'un objet quelconque. C'est absolument comme pour le cercle répétiteur. On amène la lunette du limbe au zéro; le cercle divisé est extérieur; il comprend un cercle intérieur qui supporte le vernier, et qui peut tourner indépend. du cercle extérieur. — La lunette est au zéro. Cela fait on amène le plan du limbe dans le vertical de l'objet. Puis on tourne la lunette de manière que l'objet se place au point de croisement des fils. Si l'objet était un peu à droite ou un peu à gauche cela ne fait rien; mais l'objet doit être exact. à la même hauteur que le fil horizontal. Cette condit. étant remplie après la lunette; on fait tourner l'appareil autour de son pied de 180° — cette opér. n'a pas besoin d'être faite avec une très grande exactitude; ceci fait on fait mouvoir la lunette, le cercle extérieur restant fixe, et on l'amène sur l'objet. Le zéro du vernier a ainsi décrit un angle double de la distance zénithale. On pourrait avoir des multiples plus élevés; c'est toujours la même suite d'opérations.

Quand on fait une observation la nuit on ne voit pas les fils de la lunette; on dispose à l'axe de la lunette un petit réflecteur en ivoire, et au moyen d'une bougie on amène les rayons réfléchis par le réflecteur à éclairer les fils de la lunette.

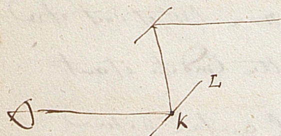
Il y a une autre petite pièce; c'est un oculaire destiné à regarder un astre qui est à peu près au zénith; il y a un miroir incliné à 45°, de telle sorte que l'observateur regarde horizontalement. —

Sextant. deux miroirs perpend. au plan d'un arc de cercle divisé. Un des miroirs est mobile et entraîne avec lui une alidade: c'est complet. étamé. Le second

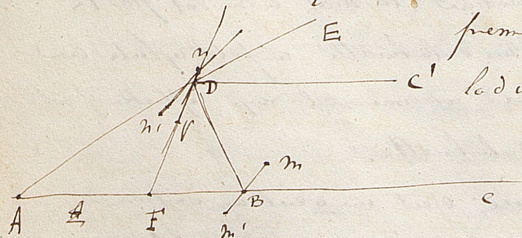
11v

est fixe; il n'est pas complètement étamé. la partie supérieure n'l'est pas — Il y a une lunette dirigée sur le miroir fixe; de manière qu'on reçoit dans la lunette le ray. reflechi dans une certaine direction, et le rayon transmis dans la même direction

principe. Si deux miroirs sont perpend. au plan passant par l'œil et par deux objets, et si d'abord les deux miroirs sont parallèles, l'image q'q des objets sera vue par double reflexion sur les deux miroirs, dans la même direction que s'il était vu directement. Si KL n'est pas étamé, l'image vue directement, et l'image vue par double reflexion coïncideront. —



2 principe. Si l'on fait tourner l'un des deux miroirs jusqu'à ce que l'image directe d'un objet coïncide avec l'image par double refraction d'un second objet, l'angle dont a tourné le miroir mobile est la moitié de l'angle compris entre les ray. visuels menés aux deux objets. en effet. Soit mm' le miroir fixe soit nn' le miroir mobile; supp. qu'il tourne et prenne la position n'p. le second objet est dans la direct. DE. (m'BA = mBD. nDB = n'DE).



il faut prouver que $n'np = \frac{1}{2} EAB$

Il faut s'assurer que le mir. mobile est perpend. au limbe pour cela on voit si le bord du limbe vu direct. coïncide avec le bord vu par reflexion — on s'assure aussi si le miroir fixe est perpend. au limbe; pour cela il suffit de s'assurer que l'image 2 fois reflechie d'un objet peut coïncid. avec l'image

vue directement. — Car alors le miroir ~~[illegible]~~ est parallèle au miroir mobile, et par suite perpendiculaire au plan du limbe. On amène le zéro du vernier de l'alidade avec le zéro du limbe. Ceci fait les deux miroirs doivent être parallèles, ~~[illegible]~~ si l'instrument est bien construit. —

On vise l'un des objets directement, et on fait tourner jusqu'à ce que l'image du 2e objet coïncide avec l'image du 1er objet vu directement. — L'angle dont est tourné l'instrument est la moitié de l'angle cherché —

Les marins se servent de cet instr. pour déterminer la haut. d'un astre au dessus de l'horizon. Les deux objets sont l'un l'astre et l'autre le bord de la mer. —

Cercle à reflexion.

Cet instrument est construit sur le même principe que le sextant; on a un cercle entier de sorte que on peut multiplier l'angle. — On amène le zéro du vern. sur le zéro du cercle divisé. On fixe l'alidade. Mais on rend le miroir à demi étamé parallèle à l'autre, en s'assurant que les deux images d'un même objet coïncident. On s'assure comme précéd. que les miroirs sont perpend. au plan du limbe. On regarde l'un des objets direct; puis on fait tourner la lunette jusqu'à ce que l'image directe d'un objet coïncide avec l'image réfléchie du 2e objet. — Pour avoir un multiple, on desserre la vis qui fixait le miroir à demi étamé, et on le rend de nouveau parallèle à l'autre miroir; le zéro du ver. de l'alidade n'a pas bougé. On déplace le petit miroir; puis on fait tourner l'alidade de manière à faire coïncider l'image directe d'un objet et l'image réfléchie du 2e objet. — et ainsi de suite.

12v

Voyons ce qui arrive quand on se déplace à la surface de la terre — les lois observées sont toujours les mêmes. quelle conclusion tirer de là ? ~~puisque~~ les astres paraissant décrire un cercle, c'est que le rayon visuel décrit un cone de révolution, et alors il faut se déplacer suivant l'axe, du cone pour que le mouv. ne soit pas altéré ; et comme ce mouv. n'est pas altéré quand on se déplace à la surface de la terre, c'est que les diment. de la terre sont insensibles par rapport aux distances de la terre aux étoiles. — Ceci résulte aussi de ce que les distances angulaires des étoiles, ne varient pas quand on se déplace à la surface de la terre. — une dernière preuve de la distance des étoiles c'est que dans les télescopes, on n'obtient jamais de diamètre sensible. — Le fil le plus fin peut cacher une étoile Donc les diments. de la terre sont négl. par rapport à la distance de la terre aux étoiles

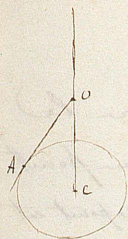
Si on marche vers le nord par exemple, la distance des étoiles à l'horizon varie. ~~dans~~ le plan de l'horizon s'incline toujours sur l'axe dans le même sens en marchant vers le nord (le plan de l'horizon est le plan tang. à la surface de la terre). — Un phénomène analogue se passe si l'on s'avance vers l'est ou vers l'ouest. les étoiles paraissent passer au méridien plutôt ou plus tard qu'au point de départ. Ceci montre que le plan du méridien s'incline vers l'est ou vers l'ouest, et partant le plan tang. donc de quelque côté qu'on s'avance le plan tang. à la surface, s'incline toujours dans le même. Ce caractère ne peut appartenir qu'à une surface convexe.

Cette convexité résulte encore d'observations faites au bord de la mer. — quand un navire s'éloigne, ce sont les parties inférieures qui disparaissent en premier lieu — il résulte de là que la surface de la mer est nécessairement convexe. — L'observat. peut se faire sur le navire qui s'éloigne de la côte, en observant une tour, une montagne

Donc la terre est un globe convexe isolé dans l'espace. Les voyages de circumnavigation le prouvent. —

Cours d'astronomie.

Idée plus précise de la forme de la terre. — on peut observer en pleine mer le bord de la mer ; si l'observat. est en O, s'il ~~observe~~ mesure l'angle COA, on trouve que cet angle est à peu près constant quel que soit le point A du bord de la mer. —



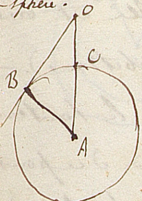
Le bord apparent de la mer est déterminé par le contact de la terre avec le cone circonscrit qui a pour sommet l'œil de l'observateur. l'observat. prouve que ce cone circonscrit est un cone droit ; si on admet ceci comme rigoureux, il en résulte que tout cone circonscrit à la sphère terrest. est un cone droit. or cette propriété ne peut appartenir qu'à une sphère. ×

× car consider. le cone circonscrit de fait. leur sommet sur la verticale CO ; ces cones étant tous de revolut. autour de CO, la terre étant l'enveloppe de ces cônes, sera elle même de revolut. autour de CO. et comme CO est indéfiniment la surface est de revolut. autour de plus. droites. donc la terre est une sphère.

Mais ceci n'est pas rigoureusement exact. donc cette conclusion n'est qu'approchée. ; nous nous en servirons comme première approximation.

Cette observat. peut donner une valeur approchée du rayon terrestre.

~~soit A un objet situé à la surface de la mer ; et supposons que l'observat. se trouve jusqu'à ce que A disparaisse — on peut déterminer la hauteur OC de l'observ. au dessus de la mer et la distance OA = a~~



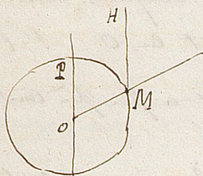
soit $OC = h$ l'observateur est en O ; on mesure l'angle $COB = \alpha$. B est un point du bord apparent de la mer. soit $AC = R$. le triangle AOB donne $R = (R+h)\sin\alpha$ d'où $R = \frac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$.

l'angle α diffère peu de $90°$ — soit $\alpha = 90 - \varepsilon$. il vient $R = \frac{h\cos\varepsilon}{1-\cos\varepsilon}$ ou sensiblement $R = \frac{h}{\frac{\varepsilon^2}{2}} = \frac{2h}{\varepsilon^2}$.

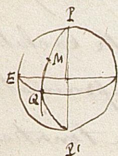
ainsi pour $h = 100^m$, ε est égal à $1°$ — donc $\varepsilon = \frac{\pi}{180}$ — substituant on trouve $R = 6340\,000$ — . pour avoir plus d'approximat. il aurait fallu tenir compte de la réfraction. —

Si, par le centre de la terre on mène une parallèle à l'axe du monde, on aura l'axe terrestre qui rencontre la terre aux pôles terrestres. tout plan passant par l'axe terrestre, coupe la sphère suivant un grand cercle qui est un méridien terrestre. —

méridiens terrestres.
equateur terrestre.
parallèles terrestres.

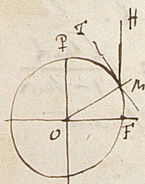


en un point le méridien terrestre se confond avec le méridien céleste du même point. en effet soit un point M à la surface de la terre. le méridien céleste de ce point est déterminé par la verticale OM, et par une parallèle à l'axe du monde menée par le point M. c'est le plan OMH. au point M le mérid. terrestre est déterminé par la verticale OM et l'axe terrestre qui est parallèle à MH. ces deux plans passant par une même droite et deux droites parallèles, donc ils se confondent. – équat. terrestre – parallèle



latitude – longitude

pour fixer la posit. d'un point à la surface de la terre on imagine le méridien PMP' qui passe par ce point, et qui coupe l'équat. en Q. MQ est la latitude du point M EQ est la longitude du point M. – La latitude se compte de 0 à 90° – on dit si elle est boréale ou australe – la longitude se compte de 0 à 180°. on dit si elle est orientale ou occidentale. – le choix du 1er méridien est arbitraire. –



La latitude d'un lieu est la même chose que la hauteur du pôle au dessus de l'horizon de ce lieu. la latitude de ce point est MOF; mais HMT = MOF. or HMT est la hauteur du pôle au dessus de l'horizon. la dist. zénithale du pôle est le complément de la latitude –

toutes les définitions supposent que la terre est sphérique sans cela elles ne seraient plus exactes. nous verrons comment il faut modifier ces ~~expressi~~ définitions quand la terre n'est plus ~~sphé~~ regardée comme sphérique

réfraction –

La terre est enveloppée d'air, dont la densité diminue à mesure qu'on s'élève. – si on admettait la loi de Mariotte si la temp. était uniforme partout, il s'ensuivrait que les hauteurs décroissant en progression arithmétique, les densités décroîtraient en progression géométrique

alors l'atmosphère s'étendrait indéfiniment. ~~tant chose~~ mais qu'il n'en est pas ainsi. — la terre a un mouvement de rotation sur elle même. il en résulte qu'à une certaine distance du centre la force centrifuge doit être égale à la pression, et alors à une distance plus grande, les couches d'air au lieu d'être attirées seraient repoussées. — donc l'atmosphère ~~est~~ serait limitée.

D'autres phénomènes indiquent l'atmosphère comme étant très limitée. C'est le crépuscule — quand le soleil est couché, on reçoit encore de la lumière solaire, et on n'en reçoit plus quand le soleil est abaissé ~~au dessus~~ de 18° au dessous de l'horizon.

voy. ce qu'on peut tirer de là. supposons qu'un rayon solaire ait la direction ABC à un certain moment. ce rayon en traversant les couches d'air éprouvera des réflexions, de sorte qu'il éclairera des points situés au dessous de l'horizon du soleil. — soit C le point où le rayon BAC rencontre la dernière couche d'air. si par le point C on mène la tangente CH, le point H sera le dernier point recevant de la lumière du soleil. — Donc au moment où le rayon solaire aura la direction ABC le crépuscule cessera en H, ~~le point le point C [illegible]~~, l'observation prouve qu'à ce moment l'angle ACK = 18°. — Car ACK est l'angle dont s'est abaissé le soleil au dessous de l'horizon. —

il en résulte $BOH = 18°$ $COH = 9°$ — soit $COH = \alpha$ soit $CI = h$.

on déduit de là au moyen du triangle OCH $R = (R+h)\cos\alpha$

d'où $h = \frac{R(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$. d'où on trouve $h = \frac{1}{100}R$ à peu près.

D'autres phénomènes ont conduit aux mêmes résultats; les aurores boréales par exemple.

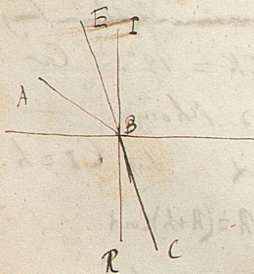
14 r

les ray. lumineux en penetrant dans l'atmosph. se refractent ; par suite les astres ne sont pas vus dans leur position réelle. –

Dans la theorie de la refraction on peut admettre que la terre est sphe[rique] et que l'atmosphere se compose de couches concentriques dont la densité est la même pour une même couche – la refract. ne peut altérer que les dist. zénithales. imaginons le plan passant par la direction primitive et le centre de la terre. –; les rayons refractés ne sortiront pas de ce plan ils ne seront déviés ni à droite ni à gauche. La distance zénithale de l'astre est altérée ; mais l'azimuth de l'astre reste le même. –

Il n'en serait pas ainsi si la densité variait à une même distance du centre de la terre ; le rayon pourrait être devié à droite ou à gauche ; aussi il faut éviter de faire des observations sur le bord de la mer, dans des moments de tempêtes, etc –; les observations alors ne mériteraient pas autant de confiance.

Si un astre est au zénith la refraction est nulle. à mesure que l'astre s'éloigne du zenith, la refraction augmente. ; car le rayon lum. traverse les couch. atmosph. de plus en plus obliquement. – Soit un rayon AB. –; qui se refracte suivant BC. l'astre au lieu d'être vu dans la direction BA sera vu dans la direction BE. l'angle ABE est ce que l'on appelle la refraction soit ε cet angle.



Soit n l'indice de refract. d'un prem. milieu par rapport au second et soit n très peu different de 1 ; c'est ce qui arrive quand le rayon passe d'une couche dans la suivante. soit $\alpha = ABI$. alors $CBR = \alpha - \varepsilon$.

on aura $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\varepsilon)} = n$. d'où

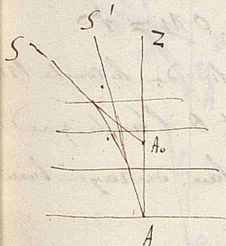
$\sin\alpha = n(\sin\alpha\cos\varepsilon - \cos\alpha\sin\varepsilon)$ ou $\sin\alpha = n\sin\alpha - n\cos\alpha . \varepsilon$.

d'où $\varepsilon = \dfrac{n-1}{n}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. donc ε est d'autant plus grand que α est plus grand, ou ce qui est la même chose, que le rayon traverse les couches atmospher. plus obliquement.

Cours d'astronomie.

Quand l'astre s'écarte peu du zénith, les divers couches qu'il traverse peuvent être considérées comme terminées par des plans parallèles sensiblement. alors on peut calculer la refraction. Si plus. milieux sont terminés par des surfaces parallèles, si un rayon traverse ces milieux, la refraction ne dépend que de l'angle d'incidence sur le 1er milieu, et des indices de refraction du premier et du dernier milieu. Soient n et N les indices absolus de refract. abstr. du 1er milieu et du dernier. on a $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{N}{n}$. l'angle β est le meme que si le rayon etait passé immediat. du 1er milieu dans le dernier. — dans l'atmosphère le rayon vient du vide. —





A est la distance zenithale apparente; l'angle $S'A_0Z$ est la distance zenithale vraie. alors $A_0 - A =$ la refract. $= \lambda$. on aura

$\sin A_0 : \sin A :: N : n$. remplaçant les sinus par les angles

$$\frac{A_0}{A} = N \quad \text{d'ou} \quad A_0 = NA. \quad \text{d'ou} \quad \lambda = (N-1)A.$$

λ est ce qu'il faut ajouter a la distance zenithale apparente pour avoir la distance zenith. vraie. N est l'indice de refraction de l'air au lieu même de l'observation — il faut avoir N. — La puissance refractive de l'air est N^2-1, elle varie proportionnellement a la densité; on peut écrire $N^2-1 = c\rho$; mais la densité ne se mesure pas directement, soit h la hauteur du barometre, θ la température. on a $h = k\rho(1+\mu\theta)$. μ etant le coeff. de dilat. de l'air — d'ou $N^2-1 = \frac{ch}{k(1+\mu\theta)}$. Donc connaissant N^2-1 pour une pression et une temper. déterminée, on l'aura pour une autre pression et une autre temper. $N_0^2-1 = \frac{c.0,76}{k}$. alors

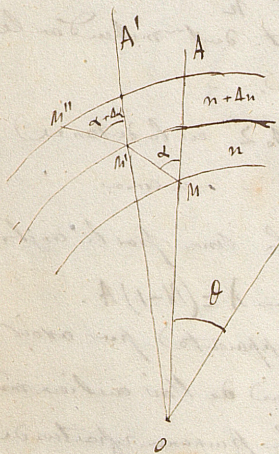
$N_2-1 = (N_0^2-1)\frac{h}{0,76}\frac{1}{1+\mu\theta}$ — L'indice de refraction differe tres peu de 1

$N_0 = 1,000294$, or $N^2-1 = (N+1)(N-1) = 2(N-1)+(N-1)^2$, ou en negligeant le carré de $(N-1)$, on peut écrire $N^2-1 = 2(N-1)$; d'ou l'eq. devient $N-1 = (N_0-1)\frac{h}{0,76}\frac{1}{1+\mu\theta}$. et $N_0-1 = 0,000294$ — ainsi connaissant A, h, et la temper. on aura N. —

15r 7

Tant que la distance zénithale ne dépasse pas 25°, le calcul donnent des résultats assez exacts. Si on suppose $t=0$, $h=0,76$ on aura $N-1=\frac{1}{3400}$. — Si on suppose $t=16°$, $h=0,76$, on a $N-1=\frac{1}{3600}=\frac{1}{60^2}$. Comme la correction est $(N-1)A$, ceci montre qu'il faut ajouter à l'angle trouvé, autant de secondes qu'il contient de degrés. —

Quand la distance zénithale dépasse 25° — ceci n'est plus exact. Si pour chaque distance r d'une couche au centre de la terre, on connaît l'indice de réfraction de cette couche, en effet la détermination de la réfraction serait une simple question de calcul. — Considérons deux couches consécutives. Soit $M'MA=\alpha$; $M''M'A'=\alpha+\Delta\alpha$. $OM=r$. $OM'=r+dr$. — n l'ind. de réfract. absolu de la couche M $n+\Delta n$ celui de la couche suivante. — Soit θ l'angle que OM fait avec une droite fixe OI prise dans le plan du rayon lum. Soit $\theta+\Delta\theta=M'OI$. —



L'angle ~~de réfraction~~ d'incidence est $\alpha+\Delta\alpha$; l'angle de réfraction est $\alpha-\Delta\theta$. donc

$$\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin(\alpha-\Delta\theta)}=\frac{n}{n+\Delta n}$$

$$(n+\Delta n)(\sin\alpha+\Delta\alpha\cos\alpha)=n(\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\Delta\theta).$$

$$\Delta n\cdot\sin\alpha+n\cos\alpha\cdot\Delta\alpha=-n\cos\alpha\cdot\Delta\theta\cdot$$

En négligeant les termes du 2e ordre ; passant à la limite

$$dn\sin\alpha-n\cos\alpha\,d\alpha=-n\cos\alpha\cdot d\theta\cdot$$

telle est l'équat. qui ~~détermine~~ détermine la trajectoire décrite par le rayon lumineux ; on peut lui donner une forme plus simple ; on sait q $tg\,\alpha=\frac{r\,d\theta}{dr}$. ; divis. l'éq. précédente par $\sin\alpha$ il vient

$$\frac{dn}{n}+\frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sin\alpha}+\frac{dr}{r}=0.\quad \text{d'où}$$

$$nr\sin\alpha=\text{Constante}$$

C'est une equat. ~~entre~~ de 1r ordre ~~entre~~ car α depend de $d\theta$ et de dr.

Soit A la dist. zenith. apparente; A est la val. de α au lieu de l'observation. Soit N l'indice de refract. au lieu de l'observat. R la dist. de ce lieu au centre de la terre — l'equat. devient

$$nr \sin\alpha = NR \sin A.$$

Soit un rayon lumineux penetr. dans l'atmosphere et arrivant en A. ZAC est la dist. zenith. app., SDZ est la dist. zenith vraie appelee A_0. Considér. un point M de la trajectoire; menons la tangente en M. on a

$TMH = \alpha$ $\quad OM = r.$ $\quad MOA = \theta.$ Soit $MUZ = \delta$.

Si on trouve la differentielle de δ, si on l'integre tout le long de la trajectoire, on aura evidemment $A_0 - A$ ou la refraction.

or on a $\quad \delta = \theta + \alpha = \theta + UMO \quad$ (au point A $\delta = A$; à l'[illegible] $\delta = A_0$.)

$$d.\delta = d\theta + d\alpha.$$

$$tg\,\alpha = \frac{r\,d\theta}{dr} \quad \text{d'où} \quad d\theta = \frac{dr}{r}\, tg\,\alpha.$$

Mais $\sin\alpha = \dfrac{NR \sin A}{nr}$. d'où $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2\sin^2 A}}{nr}$.

Donc
$$d\theta = \frac{NR \sin A\, dr}{r\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2\sin^2 A}}$$

Calcul. $d\alpha$ — on a

$$\cos\alpha\, d\alpha = -\frac{NR\sin A\,(n\,dr + r\,dn)}{n^2r^2}$$

d'où
$$d\alpha = -\frac{NR\sin A\,(n\,dr + r\,dn)}{nr\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2\sin^2 A}} \quad \text{donc}$$

$$d\delta = -\frac{NR\sin A.\,dn}{n\sqrt{n^2r^2 - N^2R^2\sin^2 A}}.$$

Il faut integrer depuis A jusqu'à B — ce qui donne

$$A_0 - A = -\int_N^1 \frac{N R \sin A \, dr}{r\sqrt{\mu^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Or au point A, $r = N$ et au point B, $r = 1$. Donc

$$A_0 - A \text{ ou } \lambda = N R \sin A \int_1^N \frac{dr}{r\sqrt{\mu^2 r^2 - N^2 R^2 \sin^2 A}}$$

Si donc on connait N en fonction de r, l'integrale pourra être calculée. —

En discutant cette formule, Laplace a montré que la distance zenithale ne depassant pas 80°, on peut au moyen de cette expression, obtenir une expression de la refraction ne dependant que de N, R, A.. on suppose $A < 80°$ — on a sensiblement

$$\lambda = m \operatorname{tg} A \left\{1 + \frac{\frac{m}{2}(2\cos^2 A + 1) - \frac{h\Delta}{R}}{\cos^2 A}\right]$$

h est la hauteur du barometre; Δ est le rapport de la densité du mercure a la densité de l'air dans les circonstances normales. a 0° et 0,76. — m est une quantité de la forme $\frac{kh}{1+\mu t}$.

alors λ est de la forme $\lambda = nk + \rho k^2$. — determ. k —, on le determine par des observations. — observons la distance zenithal d'une etoile au moment de son passage superieur, et en meme temps h, et t. on connaitra n et la distance zenithale vraie sera $z + nk + \rho k^2$. au passage inferieur la distance zenithale vraie sera de meme $z' + n'k + \rho' k^2$, mais la demi somme est egale a la distance zenithale du pole. donc

$$z + z' + k(n + n') + k^2(\rho + \rho') = 2 \text{ distance zenithale du pole.}$$

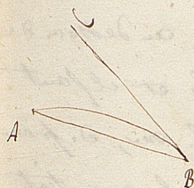
en faisant la meme chose pour une 2e etoile nous aurons encore la

Cours d'astronomie.

double de la distance zenithale du pole; en egalant les deux expressions nous aurons une equation qui servira a determiner K.

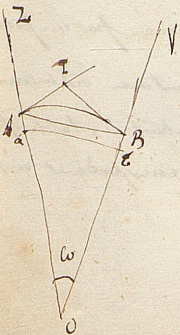
La formule ne s'applique plus quand les astres sont voisins de l'horizon. on le voit aisement; car tg A devient infinie; les termes que l'on a negligés ne peuvent plus l'etre. Pour calculer la refraction on est obligé de faire ~~les~~ des hypotheses sur la constitution physique de l'atmosphere. Pour une distance zenithale de 90°, la correction est de 34', a la temp. de 10°, et sous la pression 0,76. —

La refraction explique des apparences bizarres. elle eleve les astres d'autant plus qu'ils sont plus bas. donc elle est plus grande pour le bord inferieur du soleil que pour le bord superieur. il en resulte que le soleil etant près de l'horizon, son diametre doit etre diminué dans le sens vertical. ordinairement on voit une diminution de $\frac{1}{9}$; sur une montagne au bord de la mer, on peut voir une diminution de $\frac{1}{5}$. —



refraction terrestre. au lieu de voir un objet A suivant AB, on le voit suivant BC; c'est seule la distance zenithale de l'objet qui est alterée. si l'on connaissait la loi de la densité de l'air, nous aurions la déviation en integrant la formule connue entre des limites convenables. —

de determiner la refract. terrestr. par l'observat. des distanc. zenith. réciproques. supp. que 2 obs. situé en A et B determinent récipro q. leurs distances zenithales. pour A, la dist. zenith. de B est l'angle BAZ; mais celle observée est ZAI. soit ZAI = z et la dist zenith. l'observ. situé en B voit l'objet suivant BI, et la dist zenith. observee est VBI; soit VBI = z'. soit ω = AOB. O est le centre de la terre. soit ρ = IAB. ρ' = IBA.



17 v

On a $ZAB = z + \rho$.

$OAB = \pi - z - \rho$.

$OBA = \pi - z' - \rho'$. donc

or dans un triangle la somme des angles égale deux droits. donc

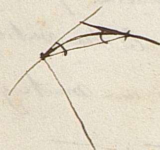
$$\pi - z - \rho + \pi - z' - \rho' + \omega = \pi.$$

d'où

$$\rho + \rho' = \pi - z - z' + \omega. -$$

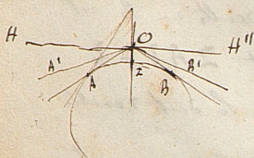
l'angle ω peut être connu quand on connait la dist. des points et projet. horizontale des points A et B. — ω est très petit, si on connait une valeur approchée du ray. terrestre on pourra calculer ω.

on peut supposer que $\rho = \rho'$. et cela sans erreur sensible. car A est très peu courbe, et la corde AB fait des angles sensibl. égaux avec les tang. aux extrémités, — la limite du rapport de ces angles est l'unité.



on aura donc $\rho = \frac{\pi}{2} - \frac{z + z' - \omega}{2}$. —

autre effet de la réfraction; — de mer le moins pour mesurer les distances zénith. de la surface, chercher la distance à l'horizon apparent. le bord de la mer est en réalité au dessous de l'horizon rationnel; la réfract. relève le bord de la mer. et il faut pouvoir connaître la dépression apparente du bord de la mer, dépression qui peut être négative, car il peut se faire que le bord de la mer soit relevé par la réfraction au dessus de l'horizon rationnel. — pour mesurer la dépression app. du bord de la mer, on se sert d'un instrument de Wollaston au moyen duquel on mesure l'angle de deux tangentes menées par un point à deux bords opposés de la mer. — on peut admettre dans les circonstances ordinaires que $AOA' = BOB'$. on connaîtra ainsi l'angle $A'OH$. or on a construit des tables qui pour certaine hauteur OI, et ces tables font connaître la dépress. vraie correspondant à la dépression apparente observée. —



Il y a un moyen d'éviter cette cause d'erreur, en se servant d'un horizon artificiel, comme un bain de mercure; on cherche l'angle de l'astre avec son image; on détermine l'angle AOC. La moitié est la hauteur de l'astre au dessus de l'horizon; et le complément est la distance zénithale de l'astre.

A

O

C

Dans le calcul de la réfract. il est inutile de tenir compte de la vapeur d'eau qu'il contient; car la vapeur d'eau peut être supposée tenir la place d'une certaine partie de l'air; or dans les circonst. normales de temp. et de pression, la vapeur d'eau a une densité moindre que celle de l'air; mais sous la même densité la vap. d'eau a une pouv. réfring. ent plus considérable que l'air. Ces deux circonstances se contrebalancent à peu près dans

géodésie. —

La terre a une forme arrondie comme nous l'avons vu. elle n'est pas rigour. sphérique. —

Le mot vertical désigne en chaque point la normale à la surface; et ici nous entend. la surface de la mer en équilibre, et prolongée sous les continents. —

Sur une surface convexe il y a toujours 2 points où le plan tangent est parallèle à un plan donné; les deux points où la verticale est parallèle à l'axe de la sph. céleste sont les pôles de la terre.

La courbe formée par les points où la verticale est parallèle à un méridien céleste est appelée méridien terrestre. Ce méridien passe necess. par les deux pôles. que sont communs à tous les méridiens. Le mérid. ne sera pas en général. des courb. planes.

Si par un point M d'un mérid. terrestre, on mène la verticale et une parallèle à l'axe de la sphère céleste, ces deux droites déterminent un plan parallèle au méridien céleste; correspondant ce plan est le plan méridien pour le point M. — Les plans mérid. corresp. aux points d'un mérid. terrestre sont parallèles entre eux; mais ils ne se confondent pas. —

On peut dire encore que un méridien terrestre est le lieu des points pour lesquels un même astre passe ~~au même moment~~ en même temps au méridien céleste correspondant.

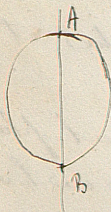
Si on prend un premier méridien pour origine, la longitude d'un point situé sur un autre méridien, sera l'angle ~~correspondant~~ compris entre les deux méridiens célestes correspondants.

On appelle latitude l'angle que la verticale du lieu fait avec l'équateur ~~terrestre~~ céleste.

Le parallèle terrestre est le lieu géométrique des points qui ont à la surface de la terre la même latitude. La forme de la terre étant … Cette ~~droite~~ ligne peut ne pas être plane —

Le lieu des points pour lesquels la latitude est nulle est l'équateur terrestre.

Voy. ce que deviennent les définit. en supp. la terre de révolution autour d'un axe parallèle à l'axe du monde. —



Dans ce cas les pôles sont les extrémités de l'axe de révolut. qui alors est appelé axe de la terre, puisque en A et B les normales sont parall. à l'axe de la sphère céleste.

Les méridiens sont des courbes planes; un plan quelq. passant par AB coupe la surface suivant une courbe dont toutes les normales sont dans un même plan, et par suite parallèles à un même méridien céleste. donc les méridiens sont des courbes planes.

Si l'on coupe la surface par un plan perpend. à l'axe on a un cercle et les normales le long de ce cercle font le même angle avec l'axe de la terre; donc les parallèles sont des petits cercles — l'équ. terrestre est aussi un cercle. — ; et la latitude est l'angle de la normale au lieu avec l'équateur terrestre. —

~~Déterm.~~ en supposant la terre sphérique sa grandeur sera déterminée par son rayon; pour cela il suffit de connaître la longueur d'un arc de cercle et l'angle correspondant; c'est à dire l'angle que font entre elles les deux verticales menées aux extrémités de l'arc.

Cours d'astronomie. Lignier

il faut d'abord tracer une arc de méridien. on se place en une
première station. et on dispose en A une lunette méridienne, qui
détermine le plan du méridien. à une certaine dist. on place une mire B,
dans le prolongement de l'axe optique de la lunette. on se transporte en B
avec la lunette, et on regarde l'objet A; puis on retourne la lunette, et on
place une mire C dans la direction de la lunette. — L'axe de la lunette
est toujours horizontal — on continue ainsi; on trace ainsi à la surface
de la terre une ligne qui est un méridien. en effet au point A la
lunette est dans le méridien; dans le point B est dans le plan du méridien.
maintenant en ce point ~~avec~~ ~~avec la lunette~~ B la lunette se meut dans le plan du
méridien. et on place la mire C dans la direct. de l'axe optique de la lunette; dans le point
C se trouve dans le méridien et ainsi de suite

si la terre est de révolut. la ligne ainsi tracée sera bien
un méridien —

si la terre est qlq, la ligne ainsi tracée sera géodésique;
elle est la distance la plus courte entre deux de ses points. en effet en
B par exemple, quand on fixe les points A et C, l'axe de la lunette est
horizontal; et quand on fixe les points A et C la lunette est toujours perpend.
à son axe, donc le plan ABC est perpendiculaire à l'axe de la lunette, et
par conséquent vertical puisque l'axe de la lunette est horizontal. or ABC
est le plan osculateur de la ~~surface~~ courbe; donc cette courbe a en tous les points
son plan osculateur normal à la surface. Donc la ligne tracée est une ligne
géodésique —

B C D

19v

revenu a notre prem. hypoth. supp. la terre spherique. — il faut mesurer l'angle d. vertical aux deux extremit.; a chaque point on determine la distance zenith. du pole, et la difference donne l'angle cherché; — il faut connaitre ensuite la distance comprise entre les deux extremités. — on se sert de regl. metalliq. que porte a leur extremités d. tig. servant a mettre la règle dans la direct. convenable on a trois règles — que disposé. un a la suite d. autr.*; on maintient toujours regl. horizontal. au moyen de niveau; de cette maniere on mesure la distance, non pas d. deux points, mais de leur projection sur la surface de la mer. — Si les deux point A et B ne sont pas sur la surface de la terre telle que nous l'avons définie, ~~ce qu'il faut so~~ a et b leur project. sur la surface de la terre, ce qu'il faut mesurer ce n'est pas AB mais ab — — ;

Supp. A et B à une même hauteur au dessus de la surface. soit h cette hauteur. on aura $AB : ab :: R+h : R$ d'ou

$$ab = AB.\frac{R}{R+h}.$$

Supp. que A et B ne soient pas a la meme hauteur, alors mesurons seulement l'arc mn mené par le milieu de l'arc AB.

et l'on aura $$ab = mn\frac{R}{R+h}$$

h etant la moyenne arithmetique d. hauteurs au dessus du niveau de la mer au point A et au point B.

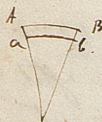
Nous verrons bientot comment on mesure la haut. d'un lieu au dessus du niveau de la mer.

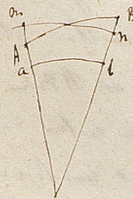
On determine ainsi la ~~distance~~ AB, longueur d'un arc de la sphere terrestre. soit A cette longueur, soit α l'angle d. deux vertical. extremes; on aura

$$A : 2\pi R :: \alpha : 360 \quad \text{d'ou} \quad R = \frac{180 . A}{\alpha . \pi}.$$

Cette operat. a été faite dans les etats unis ou il y a d. plaines considerabl.; en France cette oper. serait inexecutable. —

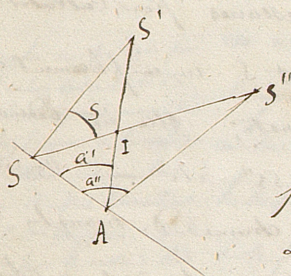
* Ces regl. sont protégés par un toit en bois contre l'act. d. ray. solaires qui pourraient faire varier la longueur de la regle, on voit un therm. indiquer la temper. et on fait l. corrections. quand la 3e est placée, on prend la 1ere pour la mettre a la suite de la 3e etc —





quand la terre est supposée sph. on a les opérat. on fait ce qu'on appelle ~~tout~~ une chaîne de triangles, de telle sorte que la méridienne de la première station ~~soit~~ traverse tous les ~~méridiens~~ triangles. soit T' la dernière station; par le point T' si on mène un parallèle terrestre, ce parallèle coupera la méridienne du point S, en C'. et on ~~demande~~ ~~de~~ mesurera ~~cette~~ la longueur de méridienne comprise entre S et C'. si maintenant on mesure la latitude en S et en T', on aura les éléments nécessaires pour calculer le rayon terrestre. On choisit près du point S un emplacement où l'on puisse tracer une base ab de quelques mille mètres; elle est ordinair. beaucoup moins grande que les côtés SS', SS'' etc. On réduit ab au niveau de la mer. on rattache la chaîne de triangles à la base ab. ab étant connu, on mesure les angles Cab et Cba réduits à l'horizon. C est une station convenabl. choisie; on peut calculer le triangle Cab; en continuant ainsi on pourra calculer les autres triangles, et les longueurs des parties de méridienne contenues dans les triangles, et les longueurs des parties de méridienne; ~~[illegible]~~. on pourra calculer SS'. puis en S, à l'aide du théodolite on mesurera l'angle BSS'. on mesure BS'S; connaissant SS' et les deux angles adjacents on calculera SB. en connaissant BSS'' et SBS'' qui est le suppl. de SBS', on calculera BS''. dans le triangle S''BH, on connaîtra l'angle en B, et l'angle en S''; BS'' étant calculé, on calculera BH. et ainsi de suite. pour calculer GC', on remarque que l'arc de parallèle TC' se confond sensibl. avec la perpend. abaissée de T sur GC'; on peut supposer TC'G comme rectangle en C', et on pourra calculer GC', puisque on connaîtra GT et TGC'. Dans une première approximat. on pourra calculer les triangles comme s'ils étaient plans.

Dans le choix des stations il faut prendre des objets visibles de loin et aisés à reconnaître comme la flèche d'un clocher, le sommet d'une montagne où l'on a planté une borne. Il faut éviter de plus que les angles des triangles soient trop aigus. Lorsqu'on a adopté pour station un clocher, on ne peut mesurer les angles à la station, il faut faire l'observat. en un point voisin et faire les correct. suivantes.



Soit le point S choisi comme stat. S' et S'' autres stat, avant avoir l'angle S'SS'', on ne peut se placer en S. l'observat placé [en A] peut déterminer l'angle $S'AS'' = a''-a'$.

Les triangles SIS' et AIS'' donnent

$$s + S' = A + S''.$$

Donc $$S = A + S'' - S'$$

Mais le triangle SAS'' donne

$$\sin S'' : \sin a'' :: SA : SS'' \quad \text{d'où}$$

$$\sin S'' = SA . \frac{\sin a''}{SS''}.$$

On peut mesurer $SA = \delta$, SS'' le connaît au moins par approximation, comme S'' est petit on peut poser

$$S'' = \delta . \frac{\sin a''}{SS''}.$$

On aurait de même $S' = \delta \frac{\sin a'}{SS'}$. Donc

$$S = A + \delta \left(\frac{\sin a''}{SS''} - \frac{\sin a'}{SS'} \right).$$

Lignier

Cours d'astronomie.-

Nous avons vu que pour calculer la long. d'une arc de meridien, pour une première approximation, on ~~a considéré~~ pouvait considerer les différents triangles comme rectilignes.- mais dans l'étendue de l'une de ces triangles, on peut considerer la terre comme rigoureusement sphérique, et dans ce cas connaissant déjà le rayon par approx.—

Soient A, B, C les angl. d'un triangle sphérique

α, β, γ les côtés comp. à a b c dans une sphère de rayon 1 ~~[illegible] A, B, C~~

a, b, c les long. de côtés mesurés avec l'unité de longueur.

alors $\alpha = \frac{a}{R} \quad \beta = \frac{b}{R} \quad \gamma = \frac{c}{R}$ quantités très petites car a, b, c sont très petites relat. à R.

on a $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos A.$

ou bien developp. en série

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{c^4}{24R^4}\right) + \left(\frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3}\right)\left(\frac{c}{R} - \right.$$

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4} = 1 - \frac{b^2}{2R^2} + \frac{b^4}{24R^4} - \frac{c^2}{2R^2} + \frac{b^2c^2}{4R^4} + \frac{c^4}{24R^4} + \left(\frac{bc}{R^2} - \frac{b^3c}{6R^4} - \frac{bc^3}{6R^4}\right)\cos A$$

en négligeant les termes qui contiennent au dénominateur R à un degré plus élevé que le 4e multipl. tout par $2R^2$ et chang. les signes il vient

$$a^2 - \frac{a^4}{12R^2} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A - \frac{b^4+c^4}{12R^2} - \frac{b^2c^2}{2R^2} + \frac{b^3c + bc^3}{3R^2}\cos A.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 4bc(b^2+c^2)\cos A}{12R^2}$$

Si on regardait R comme infini on retrouve l'équ. qui a lieu dans un triang. rectiligne.-

Soient A', B', C' les angl. de triangl. rectilig. dont les côtés auraient pour longueur a b c on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A'.$$

retranchant membre à membre cette equation et la precedente

21v

$$2bc(\cos A - \cos A') = \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 4bc(b^2+c^2)\cos A}{12R^2}$$

Ceci montre que la diff. entre A et A' est très petite ; on peut écrire en remplaçant la diff. de cosinus par le produit : puis mettant d'abord ~~[illegible]~~ $\cos A'$ au lieu de $\cos A$ ~~donnant~~ prenant $\frac{A'-A}{2}$ au lieu de $\sin\frac{A'-A}{2}$ ce qui est permis, il v[ient]

$$4bc\left(\frac{A'-A}{2}\right)\sin\frac{A+A'}{2} \quad \text{ou} \quad 2bc\left(\frac{A'-A}{2}\right)\sin A'.$$

$$2bc(A'-A)\sin A' = \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 2(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2)}{12R^2}$$

on tire $A'-A$; remarq. que $bc\sin A'$ est le double de la surface du triangle rectiligne considéré ; soit $2S$ cette surface. on aura

$$A'-A = \frac{a^4 - b^4 - c^4 - 6b^2c^2 + 2b^4 + 2c^4 + 4b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{48SR^2}$$

$$A'-A = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2}{48SR^2}.$$

Or ~~le~~ le numérateur est le carré de la surface du triangle rectil. [multiplié] à un facteur près. on a

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)\ldots}$$

de là on tire $-16S^2 = a^4+b^4+c^4-(\quad\ldots\quad)$

Donc

$$A-A' = \frac{16S^2}{48SR^2} = \frac{S}{3R^2}.$$

on pouvait dire la val. de $A'-A$ est symétrique en a, b, c

donc $A'-A = B'-B = C'-C = \frac{1}{3}\left(\varpi - (A+B+C)\right)$.

Or la surface du tri. sphér. pour laquelle on peut prendre S, est égale à $(\pi - A - B - C)$, $\pi - A - B - C = \frac{S}{R^2}$.

Donc $A-A' = \frac{1}{3}\frac{S}{R^2}$ — etc

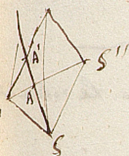
On a donc

$$A' = A - \frac{S}{3R^2} \quad , B' = B - \frac{S}{3R^2} \qquad C' = C - \frac{S}{3R^2}.$$

et $\quad A'+B'+C' = A+B+C - \frac{S}{R^2}.$

Cette quantité $\frac{S}{R^2}$ est ce qu'on nomme l'excès sphérique.

Voy. l'usage que nous f. de ce théorème.



Considérons le triangle S S' S'' — on mesure les trois angles, A, B, C

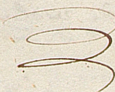
fait la somme qui est > 2 droits — soit $A+B+C - \varpi = \varepsilon$

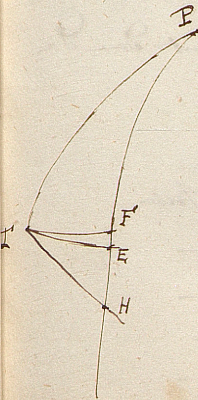
ε est l'excès sphérique — on aura

$$A - \frac{\varepsilon}{3} = A' \quad B - \frac{\varepsilon}{3} = B' \quad C - \frac{\varepsilon}{3} = C'$$

A', B', C' sont les angles d'un triangle rectiligne dont les côtés ont même longueur que les côtés du triangle sphérique SS'S''; connaissant l'un des côtés, on calcule les 2 autres, comme si le triangle était rectiligne, mais en employant pour angles adjacents les angles A' et B'. calculés comme nous l'avons dit. — Mais ceci suppose qu'on ~~connaît~~ puisse mesurer les trois angles A, B, C. —

Comment faire lorsque le triangle SAA' dans lequel on ne peut pas mesurer les trois angles. dans ce triangle on connaît un côté et deux angles adjacents. on résout le triangle comme rectiligne, (ce qui donne une approximation suffisante puisque l'on divise par R². S) on a ainsi $\frac{S}{R^2}$ ou l'excès sphérique. et alors on aura facilement les angles du triangle rectiligne.





Dans le calcul de dernier triangle ~~on aura~~ il faudrait mener un arc de parallèle, et alors on n'aurait pas un triangle sphérique puisque IE n'est pas un arc de grand cercle; alors on mène par I un arc de grand cercle perpendiculaire à HE; IF et on calcule on calcule FH au moyen du triangle rectangle FIH;

22 v

Mais ce qu'on veut c'est EH ; de sorte que de la longueur FH, il faudra retrancher la longueur EF. il faut donc calculer EF. soit P le pôle de la terre ; prolongeons le mérid. HF jusqu'au pôle. menons par le point T le méridien TP. on a TP = EP. alors

EF = EP - FP = TP - FP. mais on a un triangle sphériq. TFP rectangle en F, on connaît TF et TP.

soit TF = β, TP = α, il faut calculer FP = γ. or on a

$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma$ d'où $\cos\gamma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$. EP étant connue on le retranche de EP = α et on aura EF = $\alpha - \gamma$; on a

$\cos\gamma - \cos\alpha$ ou $2\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{\cos\alpha(1-\cos\beta)}{\cos\beta} = 2\cos\alpha \cdot \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$

ou approximativement $(\alpha-\gamma)\sin\alpha = \cos\alpha\frac{\beta^2}{2}$ d'où $\alpha - \gamma = \frac{\beta^2}{2\,tg\,\alpha}$.

donc on aura EH en retranchant $(\alpha-\gamma)$ de EF. —

En opérant ainsi sur un même mérid, mais à des latitudes différentes, l'arc d'un degré n'a pas la même longueur, donc le méridien n'est pas un cercle.

Mais sur diff. mérid., à des latitud. égales, on obtient des résultats sensiblement concordants, — de plus sur un même parallèle, à des différ. de longitud. égales correspondent des arcs égaux de ces deux dernières observations, il résulte que la terre peut être considérée comme une surface de révolution

alors les lign. géod. que nous avons tracées sont donc des méridiens. —

Étudions la forme du méridien —

	au Pérou — dist. moy. au pôle de l'arc 88°, 28', 59",	1° = 56737 toises	—
Inde	la distance moyenne au pôle de l'arc mesuré 77°, 29', 39",	1° = 56762	—
Midi de la France	dist. moy. au pôle	43°, 51', 54",	1° = 57025 —
Ecosse	dist au pôle —	37° 57' 40",	1° = 57066 —
Laponie	— —	23° 39' 56",	1° = 57196 —

Lignier

Cours d'astronomie.

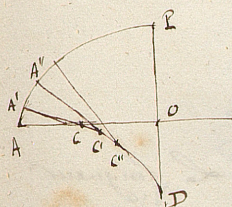
Le ray. de courbure du mérid. augmente à mesure qu'on s'approche du pole. il va augm. de l'equat. au pole, car l'arc d'un degré est un arc tel que les normales menées aux extremités comprennent un arc de 1°, et comme l'arc de 1° augmente à mesure qu'on se rapproche du pole

On conclut de là l'applatissement de la terre. Soit AC le ray. de courbure à l'equateur : du point C comme centre, je décris un arc de 1° qui se confondra sensiblement avec le 1er élément du méridien. pour décrire le second élément du méridien il faudra prendre un rayon $A'C' > A'C$ du point C' comme centre avec A'C' pour rayon je décris un arc A'A'' de 1°, et arc se confondra sensiblement avec le second élément du méridien ; j'arriverai ainsi au pole après avoir décrit 90 arcs de 1°. or la courbe $CC'C''-D < CO+OD$.

et $AC+CC'C''-D < AO+OD$.

ou $AC+PD-AC < AO+OD$

$PD < AO+OD$ ou $PO < AO$



ainsi la terre est aplatie au pole, mais ceci ~~nous~~ ~~montre~~ pas suivant quelle loi le ray. de courbure augm. de l'eq. au pole.

Le calcul prouve que l'accroissement du rayon de courbure est proportionnel au carré du sinus de la latitude, de sorte qu'on a

$$\rho = \rho_0 + c \sin^2\lambda.$$

en appelant ρ_0 le ray. de courbure à l'équateur.

Ceci appartient precisement à l'ellipse peu aplatie ; le rayon de courbure calculé en fonction de la latitude est $\rho = \dfrac{a^2b^2}{(b^2\sin^2\lambda + a^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$

ou $\rho = \dfrac{a(1-e^2)}{\{(1-e^2)\sin^2\lambda + \cos^2\lambda\}^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\cos^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$

Développant en serie on a

23 v

$\rho = a\left\{1+\left(\frac{3}{2}\sin^2\lambda-1\right)e^2+\ldots\right\}$ — Dans ce négligeant la 4e puissance de l'excentricité ρ croît proportionnellement au sinus carré de la latitude.

Ayant deux valeurs du rayon de courbure pour deux valeurs de λ, on déterminera a et e; pour avoir deux valeurs du ray. de courb. à lat. diff. on calcul. la long. de l'arc de 1° à ces deux latitudes.

Au lieu de calculer l'excentricité, on calcule l'aplatissement ou le rapport $\frac{a-b}{a} = \varepsilon$.

$$\varepsilon = 1-\sqrt{1-e^2} = \frac{e^2}{2}.$$

en remplaçant e^2 par 2ε on aura deux équations pour déterminer a et ε. — Connaissant a et ε on connaîtra b

D'après les observations faites au Pérou, en France et Espagne on a trouvé

$$a = 3271985 \text{ toises}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{308^e}$$

$$b = 3261291 \text{ toises}.$$

la diff. ce $a-b = 10694$ Toises — La longueur de l'arc de méridien $= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$, en développant en série on a ~~[illegible]~~ l'expr. facile à calculer; on trouve

$$5131276 \text{ toises}.$$

Le mètre est donc $0^T{,}5131276 = 443^{lign},342$

Mais quand on a fixé le mètre légal, on avait pris

$$0^T{,}5130740 = 443^{lig},296.$$

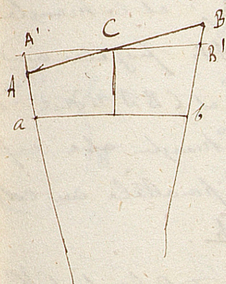
et c'est encore cette longueur qu'on prend pour mètre légal, on connaît son rapport au mètre exact.

En mètres on a $a = 6377218$ mètres

$b = 6356180$ —

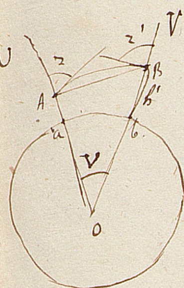
Le long de quelques meridiens la loi semble ne pas suivre tout à fait la loi du carré des sinus, de sorte que la terre ne serait pas tout à fait de revolution, ce qui s'explique par le manque d'homogeneité —

Nous avons eu besoin dans la triangulation de determiner la longueur d'une base AB; la longueur doit être reduite au niveau de la mer; suppos. qu'on connaisse la hauteur h du point C du milieu de AB au dessus du niveau de la mer. — soient a et b les project. de A et B. Je mène A'B' parallele à ab; AB est à peu près egale à A'B'. on a



A'B' ou AB : ab :: R+h : R, d'où $ab = AB\frac{R}{R+h}$

Si la base AB est dans l'interieur des terres, comment determiner h? on le peut au moyen du barometre — on peut le faire aussi par le moy. ordinaire, en prolongeant la chaîne des triangl. jusqu'au voisinage de la mer; et on determine la hauteur de la station la plus voisine de la mer, au moyen du niveau d'ingenieur; la hauteur de cette station etant connue la quest. revient à determ. la diff. des haut. au dessus de la mer de deux stat. diff. on le peut par l'observ. des dist. zenith. reciproques.



Soient deux points A et B dont les haut. sont h et h'. au point A on observe la distance zenith. du point B, et en même temps au point B on observe la dist. zenithal. du point A. soient

$$UAB = z+\delta, \quad VBA = z'+\delta'.$$

z et z' sont les distances zenithales observées; δ et δ' sont les deviat. produites par la refraction. on connait ab approximativement, et par suite $\frac{ab}{R}$ donnera l'angle V approximativement. Dans le triangle AOB on a : La somme des cotés : leur differ. :: comme la tangente de la demi somme : la tang. de la demi difference.

$$2R+h+h' : h'-h :: tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{v}{2}\right) \text{ ou } \cot\frac{v}{2} : tg(z'-z+\delta'-\delta).$$

on peut suppos. δ = δ'; posons h' = h + x il vient

$$2R+2h+x : x :: \cot\frac{V}{2} : tg(z'-z).$$

on deduit de là la val. de x; et connaissant la haut. du point A, on en deduit celle du point B. on reduit ainsi la base au niveau de la mer, et on aura ainsi la projection des triangl. sur la surf. de la mer prolongée —

par le genre d'observation qu'on fait actuellement que le niveau de l'Ocean ne differe pas sensiblement du niveau de la Mediterranée;

quant si on ne peut pas aller en un point dont on veut connaitre la hauteur comment fait-on? — Soient deux stat. accessibles A B; et soit un point C inaccessible; imaginez le triangle CAB; et ce triangle projeté a la surface de la terre. on connait la longueur AB projetée au niveau de la mer; c.a.d. ab. on mesure l'angle CAB, et CBA reduits à l'horizon; c'est a dire cab et cba. — alors dans le triangle abc on peut calculer le coté ac. — imaginez que par A on mène AK une parallèle au coté ac. Dans le triangle ACK on connait $AK = ac\frac{R+h}{R}$.

On connait aussi $CAK = \frac{\pi}{2} - Z$, alors on peut calculer CK et comme on connait la hauteur du point A, on connait la celle du point C

on doit corriger Z de la refraction; et comme on ne peut pas la trouver en C, on se servira de tables qui donnent ∂ avec approximation

on a determiné ainsi la hauteur des principales montagnes

Hauteur des principales montagnes —

Dans la chaine de l'hymalaya	8818. ?
Davalaghiri —	7830 ? —
~~Tabahir~~ —	7830 —
amerique —	
au Perou — Sorata —	7696
Mont blanc —	4807.
Mont rose —	4619.
en france le mont Pelvoux —	4100.
Le plus haut sommet du jura est	1705.
des vosges est	1400

on voit que la plus haute montagne n'est a peu pres que la $\frac{1}{800}$ partie du ray. terrestre —

Lignier

Cours d'astronomie

Comment fixe t-on la posit. d'un point de la surface de la terre? — nous sav. comment on determine la latitude; c'est la hauteur du pole au dessus de l'horizon; nous sav. comment on la détermine. — Les marins déterminent la latitude par la hauteur du soleil au moment de son passage au meridien on connait SA; la connaissance du temps donnent SP; donc on a ASP; si on prend le suppl. on a PB, qui est la haut. du pole au dessus de l'horizon.

Soleil — P pole — B

Longitude; pour determ. la diff. de long. de deux lieux, on emploie les chronometres; dans chaque observatoire il y a une horloge sideale reglée sur la revolut. diurne des étoiles; elle marque 24 heur. pend. l'interv. de deux passages consecutifs d'~~un quelconque~~ même point du ciel au meridien. on regle l'horloge sideral sur le passage au meridien d'un certain point du ciel; ce point est l'equinoxe. l'horl. marque zero heur. au moment où l'eq. passe au meridien. dans les 2 obs. on regle un chron. sur l'horloge sideale; transport. nous dans un 2e observ. situé à l'est du 1er. les chron. ne tarde pas d'accord avec l'horloge du 2e observat. suppos. qu'on parte de A pour aller en B. l'horloge de B avancera sur A; car quand l'equinoxe passe en A, il est déjà passé en B depuis quelque temps. soit $(h'-h)$ la quantité dont B avance sur A, soit l la differ. de longitude; on aura $h'-h : 24 :: l : 360$. d'où

$$l = 15^{o}(h'-h);$$ la longit. varie ainsi de 15° pour 1 heure.

au lieu d'un seul chronometre, on en prend un grand nombre,

autre moyen pour deux lieux peu eloignés l'un de l'autre — les deux lieux A et B on regle deux horlog. sur le temps sideral, on produit entre A et B un signal qui est vu en même temps en A et B; les observateurs observent à ce moment les ~~deux~~ heur. marquées respectivement par leurs horloges. — on connait ainsi la difference des heures marquées au même moment; on en deduira la difference de longitude des deux lieux.

25 v°

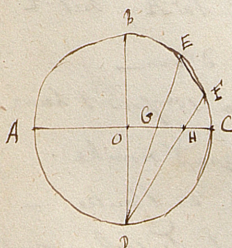
on peut employer comme signaux des phénomènes astronomiques; par exemple le moment où un satellite de Jupiter pénètre dans le cône d'ombre de la planète. — Ce moyen n'est pas très précis. car la pénombre est très difficile à observer. On ne peut préciser le moment où le satellite entre dans l'ombre.

Un moyen plus préc. consiste à prendre le moment de l'occultation d'une étoile par la lune; ceci s'observe avec précision; mais en des lieux différ. l'occultat. de la même étoile ne se fait pas au même moment — il y a une correct. à faire; nous l'indiquerons plus tard.

Conn. ainsi la latitud. et la longitud. de diff. points, on pourra repr. ces points sur une surface sphérique.

on substitue à cela part. cart. géographiques; la sphère ne pouvant se développer; on est obligé de déform. la terre. on a employé diff. modes de projections —.

project. orthogonale; on imagine un plan tangent à la sphère et on projette les points voisins sur ce plan tangent; si la partie de la terre qu'on projette est peu considérable, la déformation ne sera pas considérable autour du point de contact — mais si on projetait un hémisphère, les points situés à 90° du point de contact, seraient tout à fait déformés. —



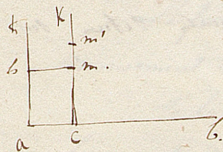
pour les mappemondes on emploie la project. stéréographique; on prend pour point de vue un point de la surface de la terre — pour un hémisphère qu'on peut projeter, on prend le pôle de l'autre hémisphère, et pour plan de projection un plan perpend. à la ligne des pôles —

Tout cercle de la sphère a pour projection un cercle; par BD et par le centre d'un cercle q/q. faisons passer un plan qui sera celui du tableau; soit EF le diamètre du petit cercle; ce plan coupe le petit cercle en deux part. symétriques. — DE DF sont deux génératrices opposées du cône dont le sommet est en D. et E

la base. Je dis que l'intersect. de ce cone par le plan AOC est un cercle. — en effet $GHD = DEF$; car $DEF = \frac{1}{2}(CD + FC)$ $GHD = \frac{1}{2}(AD + FC)$ — Donc GH est ce qu'on appelle une sect. antiparallele du cone oblique; c'est un cercle —

Cette project. a un autre avantage; c'est qu'une figure infiniment petite a pour project. une figure infiniment petite semblable; cela tient à ce que deux lignes qui se coupent sur la surface de la sphere suivant un certain angle ~~se coupent~~ ont des pour project. des lignes qui se coupent sous le même angle.

On emploie aussi la project. de Mercator pour les Cartes marines, — l'eq. AB est representé par une droite ab, et chaque merid. par une droite perpendiculaire à ab — Suppo. qu'on



veuille representer un point M par exemple — suppo. que CK represente le merid. CP; à partir du point C on porte sur CK une longueur egale à CM, on voit que les parties voisi. du pole seraient deformées parceque les dimens. suivant le merid. sont exactes, tandis que les dimentions suivant les parallel. sont considér. agrandies. — alors pour remedier à cela, on augmente les dimens. dans le sens du meridien dans le sens du parallele — soit le point m correspond. de M., soit m' corresp. de M' le point m' est pris de telle sorte que $\frac{m'm}{mh} = \frac{M'M}{MH}$, MH etant l'arc de parallele compris entre les deux meridiens. ou $m'm = MM' \cdot \frac{mh}{MH}$

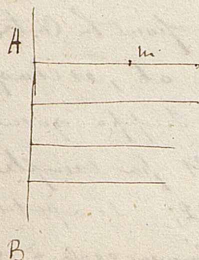
Si on pose $z = CM$, $u = cm$ on a la relation

$du = dz \frac{ac}{MH}$ mais $MH = ac \cos z$ d'où $du = \frac{dz}{\cos z}$.

et $u = \int_0^z \frac{dz}{\cos z}$. z est la latitude du lieu —



Un autre procédé qui a été suivi dans la construct. de la carte de France consiste dans l'emploi des perpend. à la méridienne. Nous savons ce qu'on fait pour déterminer la ~~ligne~~ méridienne ; on fait les mêmes observations mais dans la direction perpendiculaire ; de sorte qu'on trace une ligne géodésique perpend. à la ligne géodésique primitivement tracée. On représente sur la carte un premier méridien par une droite, et on représente les ~~lignes~~ perpend. à ce méridien par des droites perpend. à la droite précédente ; on fixe chaque point par sa distance au méridien. Cette méthode ne peut être employée que pour de petites longitudes, car par deux cercles perpend. au mérid. aux points A et B vont se couper puisque ce sont deux grands cercles ; et sur la carte ils seraient représentés par deux points situés sur deux droites parallèles différentes —



Lignier

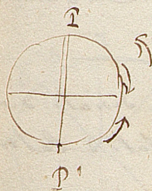
Cours d'astronomie. —

Nous avons supposé jusqu'ici la terre fixe et les astres mobiles. Les apparences que nous avons observées resteraient les mêmes, si on supposait que la terre tournant, tandis que les autres axes resteraient fixes; voyons quelle est celle de ces deux hypothèses qui est la plus vraisemblable. Les distances des astres à la terre sont considérables et inégales; il est donc peu probable que les astres soient tous emportés avec la même vitesse angulaire, tandis que cette apparence s'explique en admettant que la terre tourne autour d'un axe; il est donc plus probable que c'est la terre qui tourne autour d'un axe.

La forme aplatie de la terre s'accorde avec l'hypothèse d'un mouvement de rotation de la terre autour d'un axe, si à un moment elle a été fluide.

Si la terre était en repos, l'aplatissement produirait à lui seul la variation de la pesanteur, qui alors se confondrait avec l'attraction. or en supposant la terre formée de couches elliptiques, une même couche étant homog. ce qui est sensiblement vrai, on a trouvé qu'à l'équateur la pesanteur devrait être moindre que la pes. au pôle de $\frac{1}{590}$; or cette différence est beaucoup plus grande, elle est de $\frac{1}{194}$. ceci s'explique au moyen de la force centrifuge provenant du mouv. de rotat. de la terre; elle diminue l'attract. de $\frac{1}{289}$ à l'éq.; au pôle elle n'agit, donc la diff. en allant du pôle à l'éq. sera $\frac{1}{590} + \frac{1}{289} = \frac{1}{194}$.

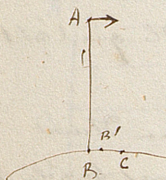
Les vents alizés qu'on observe dans le voisinage des tropiques donnent une nouvelle preuve du mouvement de rotation de la terre. Les parties de l'air voisines de l'équateur sont échauffées, et s'élèvent; elles se déversent vers les pôles, alors les couches d'air voisines marchent vers l'équateur en rasant la terre. Si la terre était en repos il y aurait dans l'hémisphère austral un vent du sud, et un vent du nord dans l'hémisphère boréal. Mais si la terre tourne, les vents ne doivent plus être du nord et du sud. La rotation se fait de l'est à l'ouest; les couches d'air participent au mouvement de rotat. de l'est à l'ouest



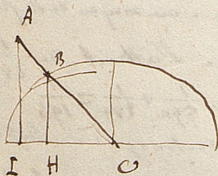
27 v

C'est un des

C'est encore le mouvement de rotation de la terre qui produit la déviation de la chute des corps pesants; la direct. du fil à plomb dans la direction de l'attraction; un corps abandonné à lui même suivra cette direction si la terre ne tournait pas. mais si la terre est en mouv. l'extremité supérieure du fil à plomb décrit un parallèle, et le corps qui ~~tomberait~~ en tombant paraît ne pas avoir de vitesse initiale parcourt un parallèle dans un jour; or cette vitesse est plus grande que celle de l'extrémité inférieure du fil à plomb. cette differ. de vit. sera sensible si la longueur du fil à plomb est suffis. grande. La force agissant sur A est perpend. à la direct. de la vitesse initiale, elle n'altère en rien cette vitesse, après le temps t, le corps sera en C, BC étant égale à la distance que A aurait parcouru en vertu de la vitesse initiale de sorte que $BC = at$. a étant la vitesse de A; de même B sera venu en B' de sorte que $BB' = a't$, a' étant la vitesse initial du point B. donc le point où tombera le corps sera est du pied du fil à plomb.



On peut calcul. approximat. la dist. au pied de la verticale soit $AB = h$; $OB = r$. T = durée de la revolut. terrestre on aura $a' = \frac{2\pi r}{T}$ $a = \frac{2\pi(r + h\cos\lambda)}{T}$



donc $BC - BB'$ = déviation $= (a-a')t = \frac{2\pi h \cos\lambda}{T} t$.
$T = 86164''$; t est donné à peu près par $h = \frac{1}{2} g t^2$, en regardant g comme constant. donc $BC - BB' = \frac{2\pi \cos\lambda \cdot h\sqrt{2h}}{T\sqrt{g}}$. Des observat. faites dans des mines très profondes ont confirmé ces résultats —

Enfin l'expérience de M. Foucault qui montre la déviat. du plan dans laquelle oscille le pendule est une preuve de la rotat. de la terre

Jusqu'à present nous n'avons parlé que des astres qui conservent la même disposit. relative — ; occup. nous des astres qui ont un mouvement propre —

Loi du mouvement du soleil.

Mouv. du soleil sur la sphère celeste par rapport aux étoiles considerées comme fixes —

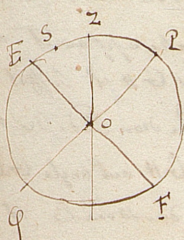
on observe journellement l'ascens. droite et la déclinaison du soleil, ainsi que le diamètre apparent, au moment du passage au meridien.

ascension droite — pour une étoile on observe le moment precis du passage de l'étoile au meridien — pour le soleil, on observe le passage des deux bords du soleil — le soleil se meut de l'est à l'ouest, et dans la lunette il se meut de l'ouest à l'est. ; on note le moment où le bord anterieur se met en contact avec le fil ; puis le moment où l'autre bord est tang. au fil ; la moyenne entre les deux epoques donne le moment où le centre du soleil a passé sur le fil — — il y a deux manieres d'observer le contact — voici celle ordinairement suivie par les astronomes, le bord A est d'abord tangent au fil CD ; puis aussitot de l'autre coté du fil on voit apparaitre un point lumineux, c'est ce moment que l'on observe. puis quand le bord B arrive près du fil CD et qu'il n'y a plus qu'un point lumineux à gauche de CD on note le moment précis où le point lumineux disparait. on dit que le disque est tangent interieurement.

si l'on a pris le plan d'une certaine etoile pour origine des ascens. droites, on aura ainsi chaque jour l'ascension droite du soleil —

l'ascens. droite du soleil varie d'un jour à l'autre —

de la déclinaison du soleil — soit PQ l'axe du monde ; EF l'equat. Z le zenith ; soit S la posit. du soleil : ES = Δ est la déclinaison. pour connaitre cette quantité il suffit de connaitre SZ distance zenithale du soleil, et PZ distance zenithale du pole. soit ρ = PZ



pour connaître la dist. zénith. du soleil, il faut connaître la distan
zénithale du pôle, puis la distance zénithale du centre du solei
la dist. zénithale du pôle est une ~~chose~~ quantité connue pour un mêm
observatoire. maintenant il faut déterminer la distance zénithale
centre du soleil au moment du passage du soleil au méridien;
on se sert du cercle mural: on observe successi. les deux bords, a
moyen du fil horizontal de la lunette; la moyenne des deux dist. don
la dist. zénithale du centre. — les deux observat. ne peuvent pa
faites en même temps, et par conséquent ne peuvent être faits au mom
du passage au méridien; mais remarquons qu'au moment du passag
du soleil au méridien, la dist. zénithal. atteint son minimum
par conséquent varie très peu; alors on observe la dist. zénith. de l'un
bord avant le passage au méridien, et on observe la distance
zénithale de l'autre bord après le passage du soleil au méridi
de cette manière les quantités observées diffèrent peu des résultats
vrais; on aura $\Delta = 90° - (z+p)$, en supp. que la déclinaison soit boréal
si la déclinaison était australe, on aurait $\Delta = z+p - 90°$. La for
si l'avait donnée tous. la déclinais. le signe indiquera si elle est boréale ou austr
Les deux genres d'observat. fournissent en même temps un
mesure du diamètre apparent; la mesure de la dist. zénithale d
deux bords donne le diamètre app. dans le sens vertical; —
si on veut le connaître dans l'observat. de l'ascension droite, c'est au
facile. — si le soleil n'avait pas de mouv. propre cela sera
très simple. il suffirait de noter la différence des époques [illegible]
passent au méridien les deux bords du soleil. imagin. le disque du so
sur la sphère céleste; les deux méridiens tang. aux bords du soleil interc
sur l'équat. un arc GH qui ne sera égal au diamètre apparent, on
en formera celui de déduire le diamètre apparent. pour avoir GH il suffit d
noter la différence des heures du passage au méridien des deux bords du sol
et les réduire à raison de 15° pour 1 heure; on aurait GH ou l'angle GP
on connaît PK et PL ou les compléments de la déclinaison du soleil et m

Lignier

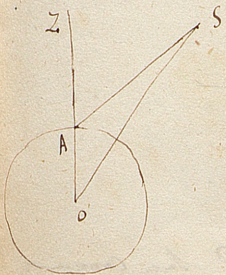
Cours d'astronomie

$\cos KL = \cos D = \cos^2(90-\Delta) + \cos^2\Delta \cos\alpha = \sin^2\Delta + \cos^2\Delta\cos\alpha$. ou bien en remarquant que $\cos D = 1 - \sin^2\frac{D}{2}$, $\cos\alpha = 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}$, on aura $\sin^2\frac{D}{2} = \cos^2\Delta \sin^2\frac{\alpha}{2}$ ou $\sin\frac{D}{2} = \cos\Delta\sin\frac{\alpha}{2}$; comme α et D sont très petits on peut écrire $D = \alpha\cos\Delta$. Mais le soleil a un mouvement propre qui fait que son mouvement autour de la terre est plus lent que celui de la sphère céleste. on peut connaître la différ. il suffit d'observer l'intervalle de temps compris entre 2 passages du soleil au méridien. soit $(24^h + F)$ ce temps; dans une heure le soleil décrira $\frac{360°}{24^h+F}$. Connaissant l'intervalle de temps qui sépare les passages des deux bords au méridien, en réduisant cet intervalle à raison de $\frac{360°}{24^h+F}$ pour une heure on aura GH, d'où on déduira le diamètre apparent.

Ces éléments sont continuellement variables. — L'ascension droite du soleil va chaque jour en augmentant; à la compter de l'occident à l'est, elle varie chaque jour de quantités inégales, — La déclinaison est continuellement variable; elle est tantôt boréale tantôt australe; le maximum de la déclinaison est 23° 28'. — Le diamètre apparent est le plus grand en hiver, et le plus petit en été. le maximum est 32', 35'', 6 — le minimum est 31', 31''. — Donc le diamètre moyen est 32', 3'', 3

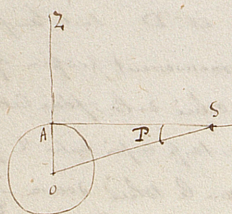
[les observat. des distances zénithales doivent être corrigées de la réfraction; cela se fait au moyen des tables de réfraction. la correct. n'est pas la même pour le bord inf. et pour le bord supérieur. — La réfract. n'altère pas les observat. d'ascension droite.]

Examinons maintenant comment ces quantités varient; mais avant faisons une correction. — pour que le diamètre app. du soleil varie il faut que sa distance à la terre varie, et alors puisque la distance du soleil à la terre est comparable aux dimensions de la terre il est évident qu'on n'obtiendra pas les mêmes résultats en différents lieux de la terre. et alors il faut ramener les observat. faites en diff. lieux à ce qu'elles seraient si les observat. avaient été faites au centre de la terre. —



La distance zénithale du soleil au moment du passage au méridien est altérée; soit un observateur placé en A. soit S le soleil; la distance zénithale observée sera $SAZ = Z'$; au centre de la terre, elle serait $SOZ = Z$. — La différ. $Z' - Z = p$ et ce qu'on appelle la parallaxe du soleil —

il faut donc determiner la parallaxe; on la deduit de la parallaxe horizontale c'est a dire de la parallaxe quand l'astre est a l'horizon de l'observateur. — soit S le soleil a l'horizon; soit P la par. horizontale. Dans le triangle rectangle AOS on a $\sin P = \frac{AB}{OS} = \frac{R}{d}$



R = ray. de la terre qu'on peut supp. spherique; d = dist. du soleil a la terre on peut ecrire simplement $P = \frac{R}{d}$, car P est un angle tres petit.

ayant la parallaxe horizontale, il est facile de l'avoir pour un point quelconque. Dans SAO on a $\sin p : \sin Z :: R : d$, d'ou $\sin p = \frac{R}{d} \sin z$, ou bien $p = P \sin Z$. — ainsi connaissant la parallaxe horizontale, on pourra en deduire la parallaxe du soleil pour une distance zenithale quelconque.

Voyons comment on peut determiner la parallaxe horizontale on pourrait le faire en observant le meme jour les deux distances zenithales du soleil de deux lieux situés sur le meme meridien, au moment du passage du soleil au meridien. soient z et z' les distances zenithales observées —; pour le point A la parallaxe est ASO = p

pour le point B elle est BSO = p'.

Dans AOS on a $z = p + AOS$

— BOS — $z' = p' + BOS$.

d'ou $z' - z = p' - p + BOA$

mais BOA est la differ. de latitude des points A et B.

donc $p' - p = z' - z - \lambda' + \lambda$.

mais $p = P \sin z$ $p' = P \sin z'$.

Donc $P(\sin z' - \sin z) = z' - z - \lambda' + \lambda$

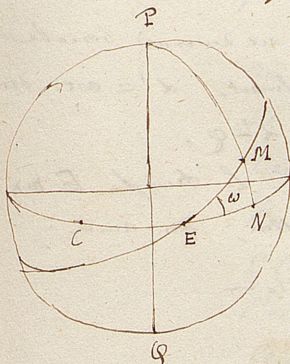
et $P = \frac{z' - z - (\lambda' - \lambda)}{\sin z' - \sin z}$.

Dans le 2e membre tout est connu, donc P sera connu.

Connaissant ainsi P, à cause de $P = \frac{R}{d}$, on en conclura la distance du soleil à la terre pour le jour où l'on a fait l'observation.

On a trouvé par des moyens plus précis et que nous indiquerons plus tard, 8",6 pour la parallaxe horizontale. — on déduit de là que $\frac{d}{R} = 24000$.

On pourra corriger les distances zénithales de la parallaxe; ayant ainsi les distances zénithales et les ascensions droites pour tous les jours de l'année on pourra construire sur une sphère le lieu des positions du soleil. On aura ainsi la projection sur la sphère céleste des positions du soleil. On trouve que ce lieu est un grand cercle de la sphère, d'où on conclut que c'est une courbe plane passant par le centre de la ~~sphère~~ terre. Ceci n'est qu'approché; mais on vérifie aisément par le calcul qu'il en est ainsi. Figurons le grand cercle que nous supposons passer par les projections des positions du soleil. Soit



E le point où il coupe l'équateur. Soit $\mathcal{E} = CE$ l'ascension droite du point E. Soit M une position du soleil. Soit $CN = A$, alors $EN = A - \mathcal{E}$. Dans le triangle rectangle EMN, $MN = \Delta$, $MEN = \omega$. on a $tg\,\Delta = \sin(A - \mathcal{E})\, tg\,\omega$. Au moyen de deux observations de déclinaison et d'ascension droite on déterminera $\mathcal{E}$ et ω. Cela fait on cherchera quelles valeurs de $\mathcal{E}$ et ω ainsi trouvées satisfont à d'autres observations faites dans le courant de l'année, et on voit ainsi que $\mathcal{E}$ et ω sont constants; la projection des positions du soleil est donc un grand cercle; ce grand cercle est l'écliptique; il ne faut pas confondre ce grand cercle avec la trajectoire du soleil, qui est dans le plan de l'écliptique. —

Le point où ~~l'équinoxe~~ l'écliptique rencontre

30v

l'equateur sont appelés équinoxes — Dans l'un le soleil y passe en allant de l'hemisph. austral, à l'hemisph. boreal; c'est l'equinoxe de printemps. — l'autre est l'equinoxe de l'automne.

Les points de l'ecliptique à 90° des équinoxes sont ceux où la déclinaison du soleil a la plus grande valeur, on les nomme solstices parceque le soleil semble s'y arrêter. ; ω se nomme l'obliquité de l'ecliptique $\omega = 23°,28'$ —

Les astronomes comptent les ascens. droites à partir du meridien passant par l'equinoxe du printemps. — nous verrons ce point n'est pas absolument fixe; malgré cela il est avantageux de prendre cette origine. —

Pour determiner φ et ω on peut faire deux observat. au moment du passage du soleil à l'equinoxe. suppos. qu'a l'observ. avant son passage à l'equinoxe — soit t cette epoque;

soit $An = \alpha$, $nm = \delta$

à une autre epoque t' la déclinaison est devenue boreale, soit $m'n' = \delta'$ et $An' = \alpha'$ — δ' = declinais. α' = asc. droite

on aura $EN = \varphi - \alpha$ et $EN' = \alpha' - \varphi$.

pour avoir le point de l'equinoxe regard. les triangl. Emn, $Em'n'$ comme semblables, rectilignes à cause de leur petite dimension; on aura

$$\delta : \varphi - \alpha :: \delta' : \alpha' - \varphi \quad \text{d'où}$$

$$\varphi = \frac{\delta\alpha' + \alpha\delta'}{\delta + \delta'}$$

pour avoir ω, dans Emn par ex. on a $\delta = (\varphi - \alpha)\, tg\, \omega$

$$\text{d'où } tg\,\omega = \frac{\delta + \delta'}{\alpha' - \alpha}.$$

Si on veut avoir l'epoque t_1 du passage du soleil à l'equinoxe, on peut suppos. que le mouv. du soleil a été uniforme pendant qu'il a parcouru mm' est très petit on aura $\varphi - \alpha : \alpha' - \varphi :: t_1 - t : t' - t_1$..

d'où on déterminera t_1

Cours d'astronomie. Lignier

L'obliquité de l'écliptique peut encore s'obtenir par ~~l'inclinaison~~ de l'observation du solstice. Vers le 21 juin on observe la declinaison qui varie très peu. Construisons par exemple la courbe des declinaisons. deux jours consecutifs n'étant pas égaux, les abcisses ne seront pas égales tout à fait. La courbe étant construite, menons une tangente horizontale, l'ordonnée correspond. donnera la plus grande déclinaison, et son pied l'époque où elle aura lieu; mais cette dernière qualité ne se met pas ainsi très exactement, car le point de contact n'est pas rigoureusement défini.

On a trouvé que $\omega = 23°, 27', 57''$ — au 1er janvier 1800. actuell. ω diminue de 48" par siècle — plus tard cette dernière se changera en augmentation. —

On compte les ascension droite à partir de l'equinoxe de printemps. —

Si on forme un catalogue d'étoiles actuellement, on trouve une très grande différence avec ceux ~~pr~~ faits par les anciens. — il est utile de voir quelle est la loi de la variation; pour cela prenons de nouvelles coord. — la longitude et la latitude. — Soit PP' l'axe de la sphère celeste, QR l'equateur, E l'equin. du printemps, S le solstice, de sorte que PSR est perpend. à l'equat. et à l'ecliptique; ~~toute~~ ~~perpend.~~ à l'ecliptique menée par le centre de la sphère est l'axe de l'ecliptique. soit OV cet axe; V sera le pole boreal de l'ecliptique.

Soit M un astre quelconque — on a $EN = \alpha$ $MN = \delta$. joig. M au pole de l'ecliptique par un arc de grand cercle l'arc EL sera la longitude de l'astre, — l'arc ML sera la latitude. soit $EL = l$, $ML = \lambda$. —, la longitude se compte à partir de l'equinoxe; il est facile d'avoir la longitude et la latitude d'un astre en fonct. de l'asc. droite et de la declinais. et reciproquement. —

31v

Considérons le triangle VPM — VP est connu, on a

$VP = \omega$, $PM = 90 - \delta$

$VPM = VPE + EPN = 90^\circ + \alpha$.

On pourra calculer l'arc VM qui est $90 - \lambda$.

et $PVM = SVE - MVE = 90^\circ - l$

On est ramené à une quest. de trigon. sphérique —

Calculons la longitude —

$$\cot(90-\delta)\sin\omega = \cos\omega\cos(90^\circ+\alpha) + \sin(90^\circ+\alpha)\cot(90 \ldots$$

d'où $$tg\, l = \frac{\tan\delta \sin\omega + \sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Calculons la latitude —

$$\cos VM \text{ ou } \sin\lambda = \cos\omega\sin\delta - \sin\omega\cos\delta\sin\alpha.$$

en vertu de la 1re formule de la trigonométrique —

On aurait de même les formules inverses; on peut dans les formules changer $l, \lambda, \alpha, \delta, \omega$

en $\alpha, \delta, l, \lambda, -\omega$

et on a

$$\sin\delta = \cos\omega\sin\lambda + \sin\omega\cos\lambda\sin l. —$$

Si on rapporte les astres à ces coord., on verra que les latitudes restent sensibl. constant, tandis que les longitudes augmentent toujours dans le même sens, et en moyenne de 50",1 par an — ; on peut concev. cette augm. de longitude en imagin. que la sphère céleste tourne tout d'une pièce autour de l'axe de l'écliptique, l'équat. restant fixe; ou bien on peut imaginer que l'axe de l'eclipt. reste fixe ainsi que la sphère céleste, mais que c'est l'équateur qui se déplace,

de telle sorte que l'inclinaison ~~sur~~ sur l'ecliptique restant constante, le point E recule, ~~autour~~ sur l'ecliptique, de sorte que c'est l'origine des longitudes qui recule; c'est cette derniere hypothese qui est la plus probable; il suffit alors que l'axe de la terre se deplace; l'autre hypoth. exigerait que tous les points de la terre se deplacassent d'un mouvement commun. ; elle est moins probable que l'autre

quel est le mouv. de l'axe de la terre. — ~~Nous~~ Nous regard. l'eclipt. comme fixe. — l'equat. garde toujours la meme inclinaison et tourne de telle facon que E recule; cela revient a dire que l'axe de la terre fait toujours le meme angle avec l'axe de l'ecliptique, mais qu'il tourne autour de lui de maniere a engendrer un cone de revolution —

Puisque les longit. augm. de 50",1 par an, pour qu'elles augm. de 360°, il faudra un nombre de fois egal au nombre de fois que 360° contient 50",1. ce qui donne environ 25900 —, c'est le temps de la revolut. de l'axe de la terre

L'equinoxe se deplace dans un sens contraire a celui de l'accroissement des ascens. droites; ou en sens contraire a celui du mouvement propre du soleil; il se deplace dans le sens du ~~apparent~~ mouvement diurne, c'est a dire de l'est a l'ouest; pour les anciens qui regardaient le mouvement diurne comme réel l'equinoxe etait avancé; de la le nom de precession des equinoxes; pour les modernes les equinoxes retrogradent, car ils les modernes regardent comme mouv. direct, ceux qui se font dans le sens du mouv. propre du soleil.

Les choses ne se passent pas encore tout a fait de cette maniere. En calculant les longitudes et les latitudes ainsi que nous l'avons fait, on aura des resultats qui seront tantot trop grands tantot trop petits

C'est Bradley qui a donné la loi de la inegalité; a rendu le phenomene, en supposant que l'axe ne decrit pas exact. un cone droit; mais qu'il tourne autour d'un axe fictif, lequel decrirait le cone droit. — ainsi concev. un cone droit de 23° 27', 57 — imagin. une droite qui decrive la surf. de ce cone d'un mouv. uniforme; imag. une sec^d droite passant par le centre de la sphere celeste, et décrivant dans un mouvement relat autour de la première droite une petite ellipse. — le grand a de cette ellipse est dirigé vers le pole de l'ecliptique, et correspond. sur la sphere a un arc de 18",5 — le petit axe de la sphere est de 13",74 — le temps employé par l'axe de la terre a decrire cette ellipse est 18^ans 2/3. on voit le changement que cela apporte dans la longitude et les latitudes; quand par ex. l'axe vrai de la terre est a l'extremité superieure du grand axe de l'ellipse, la ~~longitude vraie = la longitude moyenne~~ la latit est diminuée de 9",25, et la longitude vraie = la longitude moyenne. si l'axe de terre est à l'extremité superieure du grand axe la latitude vraie surpasse la latitude m de 9",25

quand l'axe de la terre passe par l'un des sommets du petit la latitude vraie est egale a la latitude moyenne; la longitude ~~moyenne~~ vraie surpasse la longitude moyenne ou bien est mo quelle de $\frac{6'',87}{\cos \lambda}$; λ est la latitude de l'astre. pour les points intermediaires on calculerait aisement la difference qui existe e la latitude et longit. vraie, et les latitudes et longitudes moyennes —

il faut donc bien distinguer la long. et latitude vraie de la longit. et de la latitude moyenne. —

de meme la posit. de l'equin. vraie ne resulte pas seulement du mouv. de rotation; il depend de la nutation; il est tantot en retard, tantot en avance sur l'equinoxe moyen. — c'est a partir de l'equinoxe moyen que l'on compte la longitude moyenne

Lignier

Cours d'astronomie.

Enfin l'obliquité de l'écliptique ~~est 23~~ varie entre des limites qui varient de $\omega - 6'',87$ à $\omega + 6'',87$; il en résulte un équateur vrai et un équat. moyen. C'est à partir de l'équateur moyen qu'on compte les latitudes moyennes. —

Jusqu'à présent nous avons vu la ligne décrite par le Soleil sur la sphère céleste; voy. maintenant comment il effectue ce mouvement, comment varie sa vitesse, et sa distance à la terre —

L'observat. montre que la vitesse angulaire du soleil n'est pas constante; il ne parcourt pas des arcs égaux sur l'écliptique en des temps égaux — C'est ce qu'il est facile de voir en cherchant l'accroiss. de longitude pendant un certain temps; on voit que l'accroiss. de longitude n'est pas proportionnel au temps — Si on détermine l'accroissement de longitude pendant un jour, cet accroissement de longitude divisé par le temps est la vitesse angulaire moyenne pour ce jour; on trouve encore que cette vitesse moyenne est variable d'un jour à l'autre —

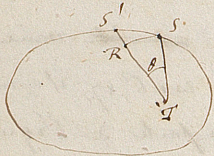
La variat. du diamètre apparent du soleil indique la variat. de la distance; le diamètre app. varie en raison inverse de la distance. En effet on a

$$\sin \frac{\Delta}{2} = \frac{R}{D} \qquad ST = D \qquad R = SH.$$

ou bien $\Delta = \frac{2R}{D}$ . . ' donc le diamètre app. est en raison inverse de la distance —

Si on fait deux tabl., l'une contenant le diamètre apparent, l'autre la vitesse angulaire moyenne, on trouve que la vitesse angulaire varie comme le carré du diamètre apparent; ~~elle~~ elle est en raison inverse du carré de la distance du soleil à la terre.

33 r



des lois de Kepler; car il résulte de là que l'aire décrite est proportionnelle au temps. — pendant un temps τ le soleil vient de S en S'. et l'angle décrit STS', est le produit de sa vitesse angulaire moyenne u par le temps. mais la vitesse ang. moy. est en proport. au carré du diamètre … soit STS' = θ. on a $u = \frac{c}{ST^2}$. donc

angle $STS' = \frac{c\tau}{ST^2}$ ou $c\tau = r^2\theta$. mais $r^2\theta$ est 2 fois l'aire de STS'; car cette aire ne diffère que d'un inf. petit du 2e ordre du secteur STR. donc aire $STS' = \frac{c}{2}\tau$. donc elle croît proport. au temps. —

Concevons maintenant qu'on construise sur un plan la distance du soleil à la terre, en prenant pour distance du soleil l'inverse du diamètre apparent. — on prend un point pour centre de la terre et on trace une ligne qui représente la ligne des équinoxes; on mène par le point fixe une droite faisant avec la droite fixe un angle égal à la longitude du soleil à un jour donné, et à partir du point fixe on prend une dist. proport. à l'inverse du diam. apparent; on trouve ainsi que la courbe décrite est une ellipse, et on sait de plus comment cette courbe est décrite puisqu'on connaît la vitesse du mobile à chaque position; le mouvement du soleil est déterminé,

Reste à déterminer la dimension réelle de cette ellipse sa position dans le ciel —

on a $\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos(\theta - \varepsilon)}{a(1 - e^2)}$

θ est la longitude du soleil; ε est la longitude du périgée. a le demi gr. axe de l'ellipse; e l'excentricité. — pour avoir quelle est bien la courbe décrite par le soleil, il faut déterminer les constantes e et ε; c'est ce qu'on fera au moyen de trois observat. du soleil; a reste arbitraire, puisque nous nous occupons que d'une courbe semblable à celle décrite par le soleil.

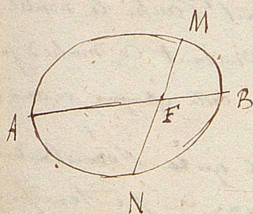
On aurait ainsi 3 équations entre lesquelles on pourra éliminer a. il restera 2 éq. pour déterminer e et ε. —

les quantités e et ε peuvent se déterminer séparément.
L'excentricité peut se déduire de l'observation des diamètres apparents maximum
et minimum. on a $\frac{1}{r} = K\Delta$; alors $K\Delta = \frac{1+e\cos(\theta-\varepsilon)}{a(1-e^2)}$
Δ est le diamètre apparent du soleil ; pour $\theta=\varepsilon$, le diamètre appa.
sera maximum soit Δ' le diamètre apparent à cette époque
on aura
$$K\Delta' = \frac{1}{a(1+e)}$$
Le diamètre apparent sera le plus petit possible quand $\theta = \varepsilon+\varpi$.
alors $K\Delta'' = \frac{1}{a(1+e)}$. d'où $\frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{1+e}{1-e}$ et par suite
$$e = \frac{\Delta'-\Delta''}{\Delta'+\Delta''}$$

e sera ainsi déterminé, seulement il est difficile de
mesurer avec beaucoup d'exact. les diamètres apparents ; tandis que
la vitesse angulaire du soleil peut se déterminer exactement.
or nous avons dit que les diamèt. apparents étaient proport. aux
racines carrées des vitesses angulaires. si V' et V'' sont les vitesses
angulaires correspond. à Δ' et Δ'' on aura $e = \frac{\sqrt{V'}-\sqrt{V''}}{\sqrt{V'}+\sqrt{V''}}$

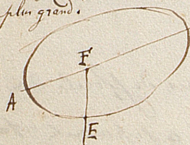
on trouve ainsi $e = 0,0168$. c'est à peu près $\frac{1}{60}$.
Cette quantité diminue de $0,00004$ par siècle.

La longit. du périgée ε peut se déterm. directement.
soit l'ellipse décrite par le soleil, F la terre, menons par F
une droite qlq. MN. cette droite partagera l'ellipse en deux aires
inégales ; or comme les aires parcourues par le rayon vecteur sont
proport. aux temps, les aires seront parcourues en des temps inégaux.
Mais si on mène le grand axe de l'ellipse AB, l'ellipse sera
partagée en deux parties égales, qui seront parcourues en des temps
égaux ; il faudra donc chercher deux points A et B dont les longitudes
diffèrent de $180°$, et qui soient tels que le soleil mette le même
temps pour aller de B en A et de A en B. Ces points



sont faciles à trouver. — on a des tables qui donnent chaque jour la longitude du soleil. — Prenons une longitude qlq, l, on connait l'époque t, où le soleil a cette longitude. En augmentant cette longitude de 180°, et en regardant dans la table on aura l'instant t_2 où le soleil passera dans cette seconde position ; on pourra de même avoir l'époque t_3 où le soleil aura la longitude $l + 360°$. — Généralement les $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ ne seront pas égaux ; en tâtonnant on finira par prendre (X)

(X) une longitude l correspond. à une époque t, telle que les intervalles soient égaux ; ensuite on distinguera le périgée de l'apogée, puisque c'est au périgée que le diamètre apparent est le plus grand.



Longitude périgée = 280°, 19′, 35″ pour le 1er janvier 18..

Cette longitude n'est pas constante ; elle augmente pour deux raisons : l'équinoxe de printemps ch. de place ; le point E reculant de 50″ par an, la longitude du périgée doit aug. de cette quantité ; d'un autre côté le périgée a un mouvement propre ; il tourne de 11″,8 dans le sens où croissent les longitudes ; donc la longit. a augmenté de 61″,9. —

On doit donc distinguer plusieurs sortes d'années. —

Le temps nécessaire pour que le cercle horaire du soleil reprenne la même position par rapport aux étoiles est l'année sidérale ; la durée en jours sidéraux est de 366,25638. — Cette quantité a pu être déterminée très exactement. — On connait la position que le soleil occupait autrefois par rapport aux étoiles ; si donc maintenant on prend le moment où le soleil occupe la même position par rapport aux étoiles on aura un certain nombre d'années sidérales ; on connait par la chronologie aussi le nombre de jours sidéraux écoulés depuis cette époque ; en divisant ce nombre de jours sidéraux par le nombre d'années sidérales écoulées depuis cette époque, on aura la val. de l'année sidérale en jours sidéraux. —

Année tropique : c'est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil à l'équinoxe de printemps. Sa durée est 366^{j},242264 en jours sidéraux. On peut déterminer sa valeur d'observations des anciens ; car les observations de Ptolémée nous donnent l'époque du passage du soleil à l'équinoxe du printemps.

Lignier 17

Cours d'astronomie

L'année ~~trop~~ sidérale surpasse l'année tropique du temps employé par le soleil à parcourir un arc de 50",1 ; il est facile d'avoir ce temps par une simple proportion

$$360° - 50",1 : 360 :: 366,242264 : x.$$

d'où on déduit x.

Année anomalistique, c'est l'intervalle entre deux passages du soleil au périgée. L'année anomalistique surpasse l'année sidérale et l'année tropique. — elle surpasse l'année sidérale du temps employé pour parcourir l'arc Aa' dont se déplace le périgée. elle surpasse l'année tropique du temps employé pour parcourir l'arc Aa', plus l'arc Ee' dont se déplace l'équinoxe — elle surpasse donc l'année tropique du temps employé à parcourir un arc de 11",8, plus un arc de 50",1 —

Les éléments du soleil étant déterminés, il est facile d'en conclure la position du soleil à un jour déterminé. Soit AB le gr. axe. F centre de la terre, S une posit. qlq. du soleil, soit t l'ép. à laquelle le soleil s'y trouve ce temps étant compté à partir du passage du soleil au périgée ; on demande de déterminer la longitude du soleil et sa distance à la terre. Soit $SFA = v$; ε étant la longitude du périgée, celle du soleil sera $v + \varepsilon$; soit $SF = r$. nous voulons avoir v et r en fonction du temps.

Décrivons sur AB une circonférence ; men. l'ord. ASP ; joig. T au centre. soit $TOA = u$, c'est une variable auxil. — remarq. que l'aire FAS est proport. au temps. soit T la durée d'une année tropique ; en divisant l'aire de l'ellipse par T, on aura l'aire décrite dans l'unité de temps — on aura FAS : aire de l'ellipse :: t : T

$$\text{aire } FAS = \frac{\pi a^2 t \sqrt{1-e^2}}{T}$$

joign. FT. on aura aire FTA : aire FSA :: $a : b$ ou $a\sqrt{1-e^2}$

35v

D'où aire $FTA = \frac{\pi a^2 t\sqrt{1-e^2}}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\pi a^2 t}{T}$

D'ailleurs aire $OFT = \frac{1}{2} OT \cdot OF \sin u$.

~~D'ailleurs~~ aire $OFT = \frac{1}{2} a^2 e \sin u$.

aire OAT ou $\frac{1}{2}a^2 u = \frac{1}{2}a^2 e \sin u + \frac{\pi a^2 t}{T}$

d'où $u - e\sin u = \frac{2\pi}{T} t$.

éq. entre u et t; l'angle $\frac{2\pi}{T} t$ exprimerait la longit. du soleil si elle croissait uniformément pendant tout le temps de l'année tropique — si à cette quantité on ajoute la longit. ε du périgée, on aura la longitude moyenne du soleil, tandis que la longitude vraie est $v + \varepsilon$. La quantité $\frac{2\pi}{T}$ est ce qu'on nomme le mouvement moyen du soleil en longitude; on pose ordinairement $\frac{2\pi}{T} = n$.

Nous écrirons donc $u - e\sin u = nt$.

On appelle encore nt l'anomalie moyenne —

$nt + \varepsilon$ = longitude moyenne du soleil —

L'angle u est l'anomalie excentrique, enfin l'angle v ou SFA est l'anomalie vraie.

L'anomalie se comptent à partir du périgée, tandis que les longitudes se comptent à partir de l'équinoxe.

Il est facile maintenant d'avoir r et v en fonction de t. dans l'ellipse on a

$r = a - e \times OL$. mais $OL = OT\cos u = a\cos u$

donc $r = a(1 - e\cos u)$ —

pour avoir v on a $r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v}$.

donc $(1 - e\cos u)(1 + e\cos v) = 1 - e^2$.

$1 - e\cos u + e\cos v - e^2\cos u\cos v = 1 - e^2$

Supprimant le commun facteur commun il vient

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}.$$

d'où
$$1 - \cos v = \frac{1 - \cos u}{1 - e\cos u}(1+e).$$

$$1 + \cos v = \frac{1 + \cos u}{1 - e\cos u}(1 - e).$$

$$tg^2\frac{v}{2} = \frac{1+e}{1-e}\,tg^2\frac{u}{2} \ldots\ tg\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\frac{1}{2}u.$$

ainsi donc t étant connu, on determinera u et par suite r et v.

La difference entre l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne, $v - nt$ est appellée <u>équation du centre</u>. on pourrait developper $v - nt$ en serie. on aura

$$v - nt = 2e\sin nt + \frac{5}{4}e^2\sin 2nt + -$$

Cette equat. du centre s'annulle à l'apogée ou au perigée car alors $nt = n.\pi$. l'equat. du centre est positive quand le soleil va du perigée à l'apogée; elle est negative quand le soleil va de l'apogée au perigée.

Pour avoir le maximum de l'equat. du centre il faut egaler à zéro sa dérivée par rapport au temps. Ce qui donne

$$0 = 2ne\cos nt + \frac{5}{2}e^2\cos 2nt + -$$

Lignier

Cours d'astronomie.

Jour vrai; c'est l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages successifs du soleil au méridien; or ce jour n'étant pas égaux entre eux, il faudrait que la projet. du soleil sur l'equateur eut un mouvement uniforme; mais cela n'est pas pour deux raisons: quand même le soleil parcourait l'ecliptique d'un mouvement uniforme, sa projection ne parcourrait pas l'equat. d'un mouvement uniforme; car aux solstices la tangente est parallele a l'equateur, tandis qu'aux autres points de l'ecliptique la tangente fait un angle variable avec le plan de l'equateur. De plus le soleil ne parcourt pas l'ecliptique d'un mouvement uniforme. —

Jour moyen. Concev. un 1er soleil fictif qui part du périgée en même temps que le soleil vrai, et qui decrit uniformement l'ecliptique dans l'espace d'une année tropique. Concev. un 2e soleil fictif, qui reviendrait à l'equinoxe de printemps en même temps que le 1er soleil fictif, et qui décrirait l'equateur d'un mouv. uniforme dans le même espace d'une an. tropique. Ce 2e soleil fictif est appelé soleil moyen; et l'intervalle du temps entre deux passag. au mérid. du soleil moyen, est appelé jour moyen.

il est facile d'avoir le rapport du jour sidéral au jour moyen. Soit S la durée du jour ~~moyen~~ sideral, m la durée du jour moyen; A la durée de l'année tropique exprimée en jours sidéraux. Pendant une année tropique la longitude du soleil moyen augmente de 2π. — dans l'unité de temps elle augmentera de $\frac{2\varpi}{A}$; dans un jour moyen, elle augmentera de $\frac{2\pi . m}{A}$; il suit de la que si au commencement d'un jour

37 r

moyen le soleil coincidant avec une certaine étoile, alaps[illegible] d'un jour moyen il aura avec cette étoile une diff. de longitude egale a $\frac{2\pi}{A}$. Mais pour que l'etoile depasse le soleil de $\frac{2\pi m}{A}$ il a fallu un temps egal a $\frac{mS}{A}$; Car l'étoile décrivant 2π dans le temps S, décrira $\frac{2\pi m}{A}$ dans un temps egal a $\frac{mS}{A}$. Donc

$$m = S + \frac{mS}{A}.$$

d'ou l'on conclut $m = \frac{AS}{A-S}$; donc A étant exprimé en jours sidéraux on aura $m = \frac{366,242264}{365,242264} S$.

ou bien $S = \frac{365,242264}{366,242264} m$.

Si l'on prend m pour unité et egal a $86400''$, on trouve ~~$S = 86400''$~~ $S = 86164$. — La différence est $236''$, ou $3', 56''$. — La durée de l'année en jours moyens est donc $\frac{A}{m} = 365,242264$, elle est inférieure d'une unité a l'expression de l'année en jours sidéraux.

de $m = S + \frac{mS}{A}$ on deduit $\frac{m}{S} = 1 + \frac{m}{A}$. d'ou $\frac{A}{m} = \frac{A}{S} - 1$

On appelle midi moyen l'instant du passage au meridien du soleil moyen. — C'est le jour moyen qu'on prend pour unité de temps; le jour moy. etant composé de 24 heures, le jour sidéral $= 23^h, 56', 4'' = 86164'' =$ jour moyen $- 3', 56$

l'année tropique est egale a $365^j, 5^h, 48', 51'', 6$. C'est l'année tropique moyenne; le temps employé par le soleil ~~pour~~ ~~aller~~ [illegible] de l'equinoxe a l'equinoxe moyen ; c'est l'inter entre 2 passages du soleil a l'equin. moyen —

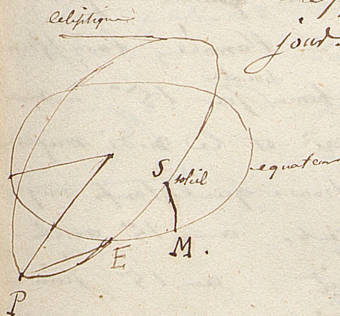
Année sidérale; — plus longue que l'an. tropique puisque l'equinoxe recule de $50'',1$ — c'est ~~du~~ le temps necessaire a decrire ~~cet~~ arc qu'l'année ~~tropique~~ sidérale surpasse l'année tropique; l'année sidérale en jours moyens est $365^j, 6^h, 9', 11'', 5$.

année anomalistique; elle surpasse l'année sidérale du temps necess[aire] au soleil pour parcourir l'arc de 11" — temps que le calcule par la proportion suivante —

Il est facile de deduire de la durée de l'année tropique le mouvement angulaire moyen du soleil que nous avons représenté par $n = \frac{2\pi}{T}$, T étant la durée de l'année tropique. n est dit le moyen mouvement du soleil; on a $n = \frac{360}{365^{j.m.},242264} = 0°,59',8'',3$

Ce mouvement moyen depend évidemment de l'unité de temps qu'on a adoptée. c'est en moyenne la quantité dont la longitude du soleil augmente dans un jour moyen.

La différence entre le midi vrai et le midi moyen s'appelle equation du temps. — on peut la calculer pour chaque jour. — soit P le périgée, soit EP = α. quantité connue; c'est 360° — la longitude du périgée. Considérons le soleil à une époque quelconque t comptée à partir du moment du passage du soleil au périgée; menons par S un arc de gd. cercle SM perpendic. à l'equateur —; EM est l'ascens. droite du soleil pour ce jour là; soit EM = Q. ; soit PS = θ. c'est l'anomalie vraie —



or on a $tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\; tg\frac{u}{2}$ u étant donnée par $u - e \sin u = nt$; t étant connu on pourra donc calculer θ; θ étant connue, si on en retranche EP on aura ES = θ − α; connaissant ES on peut avoir EM = Q. car le triangle rectangle EMS donne $tg\, Q = tg(\theta - \alpha)\cos\omega$; on peut donc dire que Q est une ~~connue~~ fonction connue de t.

Il est facile de calculer l'ascension droite du soleil moyen. soit EM' = Q, cette ascension droite — le 1er soleil fictif est parti du périgée en même temps que le soleil vrai; pour décrire α

38v

c'est à dire pour arriver en E, il mettra un temps t' donné par $t' : T :: \alpha : 2\pi$ d'où $t' = \frac{\alpha T}{2\pi} = \frac{\alpha}{n}$

quand ~~il passe~~ le soleil fictif à l'équinoxe, le soleil moyen part de l'équinoxe pour décrire l'équateur d'un mouv. uniforme ; c'est donc à l'époque $\frac{\alpha T}{2\pi} = \frac{\alpha}{n}$ que le soleil moyen part de l'équinoxe ; donc ~~[illegible]~~ à l'époque t, le soleil moyen aura marché pendant un temps $t-t'$, donc il decrira un arc égal à $n(t-t')$; donc à l'époque t, $Q_1 = n(t-$

Soit τ pour lieu déterminé l'heure du 1er passage du soleil au méridien après le passage au périgée, - pour $t = \tau$ c'est midi vrai à ce ... faisant $t = \tau+1$ $t = \tau+2$, —

l'unité de temps étant le jour, on aura les époques des midis vrais pour chaque jour de l'année. Ces quelles donnent ce qu'on a ... Calculer Q et Q_1 pour chaque jour de l'année, la différence réduite en ~~temps~~, à raison d'une heure sidérale par 15°, on aura la différ. de temps entre le midi vrai et le midi moyen

Pour l'époque actuelle on trouve que le temps moyen avance sur le temps vrai du 24 décemb. au 15 avril.
il retarde du 15 avril au 15 juin
il avance du 15 juin au 1er sept.
il retard. du 1er sept. au 24 décembre

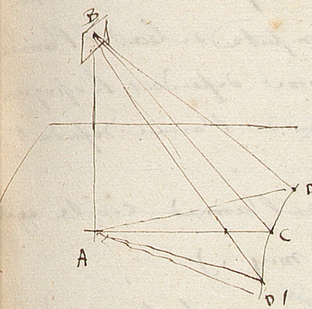
L'époque du retard maxim. du temps moyen est le 4 novembre ; il retarde de 16', 16", 2 —
l'époque de l'avance max. du temps moy. est le 11 février ; l'avance est de 14', 32", 14 —

Instruments destinés à indiquer l'heure vraie — gnomon - c'est une tige verticale[x] supportant une plaque percée d'un trou ; cette plaque jette une ombre sur un plan horizontal, et l'image du trou se déplace avec le soleil

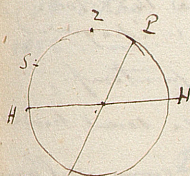
x il n'est pas nécessaire que la tige soit verticale.

Cours d'astronomie

à midi, la hauteur du soleil est maximum; à ce moment si BCA est l'angle de la hauteur du soleil, cet angle étant maximum, AC sera maximum. à midi la distance AC est maximum; à des époques également éloignées de midi si D et D' sont les images de l'ouverture, on aura CAD = CAD'ˣ et AD = AD'. il suit de là que si l'on imagine la courbe tracée par le point lumineux sur le pl. horizontal, et que l'on divise en deux parties égales l'angle DAD', par la droite AC, cette droite AC sera dans le plan du méridien. — quand le point lumineux se placera sur AC il sera midi vrai — cet instrument peut servir à mesurer la déclinaison du soleil. on aura $\frac{AB}{AC} = tg\, BCA$; et BCA est la hauteur du soleil au dessus de l'horizon à midi, il est facile de déduire de là la déclinaison du soleil — soit h la hauteur du soleil au dessus de l'horizon. on a $SZ = 90° - h$, alors $SP = 180° - (h+\lambda)$ = complément de la déclinaison. donc déclinaison = $(h+\lambda) - 90°$. λ est la latitude du lieu.



x. de plus BDA = BD'A. donc AD = AD'. — la courbe du point lumineux étant tracée du point A on décrit un cercle avec un rayon arbitraire, lequel coupe la courbe en 2 points D et D'. —



L'heure vraie est indiquée par le cadran solaire; un cadran solaire se compose d'un style rendu parallèle à l'axe de la sphère céleste — le soleil en un jour décrit un parallèle de la sphère céleste, lequel a son centre sur AB prolongée; imaginons qu'à partir du point le plus haut du parallèle on divise le parallèle en 24 parties égales; les époques des passages du soleil à ces divisions seront les heures de la journée; faisons passer des plans par ces divisions et l'axe de la sphère céleste. ces plans feront entre eux des angles égaux; de plus quel que soit le parallèle décrit par le soleil, ces plans seront les mêmes. par conséquent ces plans étant déterminés pour un jour de l'année conviendront pour tous les jours de l'année. les traces de ces plans sur la surface seront invariables; quand l'ombre du style se dirigera suivant la ligne méridienne il sera midi. les autres heures seront indiquées par les époques du passage de l'ombre du style sur les diffé. traces des plans sur la surface.



année civile — elle ne doit renfermer qu'un nombre entier
de jours; c'est sur l'année tropique qu'il importe de baser l'année
civile; car du passage du soleil à l'équinoxe dépendent les époques
des saisons; de cette manière les mêmes époques de l'année répondent
aux mêmes saisons —

La 1re approxim. consiste à prendre l'année civile égale
à 365j. — (c'est l'ann. égypt. de jours moy.) —

Chaque année civile est moindre que l'année tropique de
5h, 48', 51'',6 ou 6h envir.; de sorte qu'au bout de
4 ans la somme des années ~~tropiques~~ civiles était inférieure
à la somme des années tropiques d'un jour à peu près. —
au bout de 4 fois 365 années civiles c.à.d. 1460 ann. civiles, il y avait
une différence d'un an entre la somme des ann. tropiq. et la somme des années civ.;
pendant 1460 ann. civiles le soleil n'était revenu à l'équinoxe que 1459 fois.
Il en résultait des inconvénients; car si à une époque
le commenc. de l'année est à l'équinoxe du printemps,
au bout de 730 — le comm. de l'année se serait trouvé
avec le commencement de l'automne; ainsi le comm. de l'année
correspondait successiv. aux diff. saisons —

César admit que l'année tropique avait pour durée
365j, 6h. — alors il suffisait au bout de 4 années civiles
d'ajouter un jour à la dernière année. ainsi 3 ann. consécutives
étant de 365j, la 4e en a 366 —

Ceci n'est pas suffisant encore; l'année exacte
est 365,242264 et non pas 365,25; le calendrier
jul. ~~supposait~~ suppose l'année trop longue de 0,007736.
Il faut de temps en temps supprimer quelq. unes des
années bissextiles; en supprimant 3 ann. bissextiles en 400
ans on fait disparaître l'erreur à peu près; en effet

supprimer 3 années bissextiles en 400 ans cela revient à supprimer 3 jours par 400, ou $\frac{3}{400}$ de jour par an; or $\frac{3}{400} = 0,0075$. on diminue donc l'année de 0,0075; ce n'est pas encore suffisant, puisqu'il faudrait la diminuer de 0,007736 — la différence est 0,000236. il faudrait donc diminuer la valeur moyenne de l'année de 0,000236.

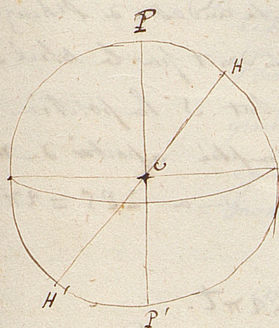
~~il faudrait encore diminuer la valeur moyenne de l'année de 0,000236.~~ — pour cela il suffirait de supprimer une année bissextile dans les quatre mille ans —

Les années bissextiles ~~sont~~ celles dont le nombre sont divisible par 4 — ; tous les 400 ans on supprime ~~une~~ trois années bissextiles; si on considère les années bissextiles 1700. 1800 1900 2000, on ne conservera comme bissextile que celle dont le nombre divisé par 100 est encore divisible par 4; on ne conservera comme bissextile que l'année 2000 — X.

X. C'est la réforme grégorienne à cette époque le lendemain du 5 octobre a été appelé le 15 octobre. cette date de 1582. —

Inégalité des jours et des nuits. Saisons. —

Supp. un observateur placé à l'équateur; son horizon est parallèle à l'axe de la sphère céleste,(*) le soleil dans un jour décrit un parallèle de la sphère céleste; tout plan passant par PP' divise en deux parties égales tous les parallèles décrits par le soleil; donc pour un observateur placé à l'équateur le soleil est autant de temps au dessus qu'en dessous de l'horizon. dans les jours sont égaux aux nuits. —



(*) on la considérant la terre comme se réduisant à son centre, son horizon contiendra l'axe de la sphère céleste.

Suppos. que l'observateur s'éloigne de l'équateur, le plan de l'horizon prend par exemple la position HH'; quand le soleil décrit l'équateur, ce grand cercle décrit est divisé par HH' en deux parties égales; donc à ce moment là et pour l'observateur en question le jour sera égal à la nuit. mais les jours suivants

le soleil décrira des petits cercles de plus en plus éloignés de l'équa[teur] et HH' partagera ces petits cercles en parties inégales. pour un observateur situé dans le pôle boréal, quand le soleil part de l'équinoxe du printemps, le soleil étant plus longtemps au dessus de l'horiz. qu'au dessous les jours augmentent. les jours augmentent donc avec la declinaison du soleil, puis ils diminuent; mais les jours sont plus longs que les nuits tandis que pour un obs. situé dans le pôle ~~boréal~~ austral les nuits sont plus longues que les jours — le soleil repasse à l'équin. d'automne; quand il est de l'autre côté de l'équateur, ~~en~~ tant les jours sont plus courts que les nuits dans le pôle boréal il peut se faire que HH' ne coupe pas tous les parallèles décrits par le soleil — 1, l'angle de HH' avec l'équat. est $< 23°, 28'$, dès que la déclinais. du soleil aura dépassé la valeur de EH, le parallèle décrit par le soleil n'atteindra plus l'horizon il faut pour cela que $90 - \lambda < 23, 28'$, λ étant la latitude du lieu considéré — cercle polaire; celui qui répond au pôle boréal est appelé <u>arctique</u>; l'autre est appelé <u>antarctique</u>

Pour une latitude donnée on peut avoir la durée d'un jour, c.a.d. le temps que le soleil reste au dessus de l'horizon. soit PP' la ligne des pôles, FG le cercle décrit par le soleil. on a $FP = 90° - \text{declinaison} = 90° - \delta$. soit S la position du soleil ~~au méridien~~ à l'époque t. comptée à partir de midi. t est une fract. de jour. soit $SZ = z$; on a $ZPS = 2\pi t$. c'est l'angle horaire. Mais

$$\cos z = \sin\lambda \sin\delta + \cos\lambda \cos\delta \cos 2\pi t.$$

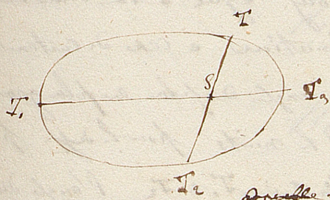
pour chaque heure t du jour on aurait donc la distance zénithale du soleil. il faut supposer $z = 90°$ pour avoir la durée du demi-jour. on aura $0 = \sin\lambda \cos\lambda + \cos\lambda \cos\delta . \cos 2\pi t$. d'où on déduit t ; 2t sera la durée du jour entier; et $1 - 2t$ sera celle de la nuit.

Lignier

Cours d'astronomie. —

Inégalité des jours et des nuits en regardant le soleil comme fixe, et la terre comme mobile. — Le mouv. réel de la terre ~~se fait~~ autour du soleil se fait de la même sorte que le mouv. appar. du soleil autour de la terre.

La ligne des équin. est l'int. de l'éq. et de l'eclipt. au moment de l'équin. du printemps le soleil est situé sur le prolongement de cette ligne. Soit ST cette intersection quand la terre est en T le plan de l'équateur terrestre coupe l'ecliptique suivant ~~ST~~ ST.



~~quelle - les~~ ray. lumineux du soleil peuvent être regardés comme parallèles. — pour avoir la separ. d'ombre et de lumière, il faut chercher la ligne de contact de la sphère et du cylindre circonscrit parallèle aux rayons solaires. — il suffit de mener par le centre de la terre un plan ~~parallele~~ perpendiculaire aux rayons solaires. menons par le centre de la terre un plan perpend. à ST, ce plan sera perpendiculaire à l'équat. terrestre qui contient ST, il contiendra la ligne des pôles. Alors le grand cercle qui sépare l'ombre de la lumière divisera en deux parties égales tous les parallèles decrits par les differents points de la terre. donc à ce moment, pour toute la terre les jours seront égaux aux nuits. —

La terre continuera à marcher et il arrivera un moment où le rayon vect. mené du soleil à la terre sera perpendiculaire à la ligne des équinoxes. Soit la terre en T, et supposons ST_1 perpendiculaire à ST. Le plan de l'équateur terrestre reste parallèle à lui même, à l'intersection de l'équat. terrestre et de l'ecliptique est perpendiculaire a ST_1. — Le grand cercle qui sépare l'ombre de la lumière contient cette intersection, et de plus est perpendiculaire au plan de l'ecliptique

41v



il fait donc avec l'axe terrestre un angle égal à l'obliquité de l'écliptique c.a.d. = 23°, 28'. — Si PP' est la ligne des pôles COP = 23°, 28', le cercle COD se divise par les deux parties égales les parallèles décrits par les différents points de la terre. Pour tous les parallèles dont la distance au pôle est < 23°, 28' le soleil ne se couche pas; pour les points compris entre E et C, le jour est > que la nuit. — pour les points situés dans l'autre hémisphère ce sera le contraire. pour les points situés all'eq. le jour est touj. égal à la nuit. — en allant de T à T_1, le cercle d'illumination a cessé de contenir la ligne des pôles, et avec cet axe PP' un angle de plus en plus grand; cette raison, l'inégalité entre les jours et les nuits pour les diff. points ont été en augmentant. La terre allant de T_1 en T_2, l'angle diminue jusqu'à zero, et des phénomènes inverses se produisent. —

Les durées des saisons ne sont pas égales, ceci se voit sur la figure, les aires correspondantes aux diverses saisons ne sont pas égales actuellement le périgée

les aires correspondantes au printemps et à l'été sont plus grandes que celles correspond. à l'automne et à l'hiver. L'été est plus grand que le printemps; le printemps est > l'automne; l'automne est > l'hiver. — mais ceci a lieu pour l'époque actuelle, car ceci dépend de la position du périgée par rapport à l'équinoxe du printemps. — et les deux points ont chacun un mouvement propre. — l'an 6485 les saisons seront égales puis les inégalités changeront de sens. — actuellement on a

été + printemps = aut. + hiver + 8 jours.

cette inégalité des saisons explique pourquoi à latitudes égales, il fait plus froid dans l'hémisphère austral que dans l'hémisphère boréal, actuellement du moins

Signes. — les anciens divisaient l'écliptique en 12 signes qui sont chacun un arc de 30°. — le premier commence

à l'equinoxe du printemps, c'est le belier. L'origine de ce nom vient de ce que à l'epoque où on les a nommés, les differents signes respondaient aux constellations du même nom. Mais maintenant puisque l'equinoxe se deplace, ~~il faut~~ des signes ne repondent plus aux constellat. du même nom. Quand on parle d'un signe ~~il faut~~ doit distinguer la constellat. de ce nom, de l'arc ~~[illegible]~~ de 30° de l'ecliptique et qui commence à l'equinoxe du printemps. —

Dimension absolue de la trajectoire du soleil sur l'ecliptique —

Il faut pour cela connaître la parallaxe moyenne du soleil. On sait que la parallaxe horizontale $= P = \frac{r}{D}$. D'où $D = \frac{r}{P}$. r rayon de la terre ; D. dist. du soleil à la terre —. On ~~trouve aussi~~ connaît la parallaxe moyenne elle est egale à 8",6. alors en divisant le ray. moy. de la terre par cette parallaxe on trouve

$$D = 24045 \text{ rayon terrestre.}$$

C'est ce que nous avons appelé précéd. a, connaissant e on en concluera $ae = 404$ rayons terrestres —

Connaissant P et le diametre apparent du soleil on peut en conclure la dimention de cet astre. — Le diametre apparent moyen est 32', 3",6 —



alors CAS = 16', 1",8. —

soit R le rayon du soleil —

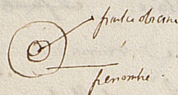
$$\frac{R}{D} = \sin CAS = \sin 16', 1",8$$

mais $\frac{r}{D} = \sin P = \sin 8",6$ — d'où

$\frac{R}{r} = \frac{16', 1",8}{8",6} = 112$. on trouve que le volume du soleil est environ 14000 fois celui de la terre —

42v

La surface du soleil n'est pas également partout lumineuse. Il y a des parties dont l'éclat est plus grand ou moins grand que l'éclat moyen. — Les parties obscures s'appellent taches; elles occupent d'une bande de 60° de largeur. — Le centre de ces taches est plus obscur que la pénombre qui l'entoure; la forme de ces taches varie d'un jour à l'autre.



Il y a des parties très brillantes appelées facules. —

Ces taches ne restent pas immobiles sur le soleil; indépend. des déformations qui leur sont propres, elles ont toutes un mouvement commun, qui indique que le soleil a un mouvement de rotation autour d'un axe; cet axe est peu incliné sur l'écliptique; le mouv. se fait dans le même sens que celui

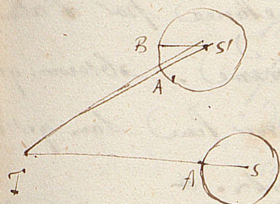
Le mouv. diurne

du soleil autour de la terre, de sorte que les taches que nous voyons se meuvent pour nous de gauche à droite; voyons comment on peut déterminer la direction de l'axe de rotation du soleil —

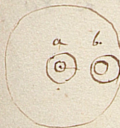
Si l'axe de rotat. du soleil était perpend. au plan de l'écliptique chaque tache paraîtrait décrire une ligne parallèle au plan de l'écliptique; mais il n'en est pas ainsi. Si l'on détermine chaque jour pour une certaine tache la différence de latitude et de longitude avec la latitude et la long. du centre du soleil, on pourra construire la trajectoire de la tache sur une sphère; ces courbes ne paraissent pas droites; il y a deux époques dans l'année où elles paraissent droites, c'est quand le plan de l'équateur solaire passe par le centre de la terre; l'inclinaison de cette droite sur l'écliptique donne l'angle que fait l'équateur solaire avec le plan de l'écliptique; cet angle est de 7°, 30'. — Les taches semblent décrire des lignes droites quand la longitude du soleil est 80°, 7' et 260°, 7'. c.a.d. le 11 juin et le 12 décembre

Cours d'astronomie.

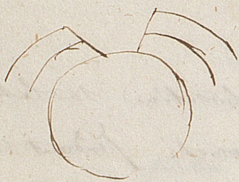
Une tache revient prendre la même position sur le soleil au bout de $27^j,3$. mais le soleil a marché pendant ce temps. Suppos. que le soleil soit en S; consider. une tache A occupant le centre du disque du soleil; cette tache sera vue suivant TS. au bout de $27^j,3$, la tache sera vue suivant TS' en A', S' étant la nouvelle position du soleil — si par S' nous menons une parallèle S'B, à SA, le soleil aura tourné de BS'A' pendant les $27^j,3$; et l'angle BS'A' = S'TS comme altern. interne; — ainsi au bout de $27^j,3$, le soleil aura tourné de (4 droits + arc BA') or BS'A' est l'accroiss. de longitude du soleil pendant $27^j,3$; mais pendant une année la longitude du soleil augmente de 2π; donc en un jour elle augmente de $\frac{2\pi}{365,24}$; donc en $27^j,3$, elle augmentera de $\frac{2\pi \times 27,3}{365,24}$; donc en $27^j,3$, le soleil aura tourné de $2\pi\left(1+\frac{27,3}{365,24}\right)$; le nombre de jours nécessaire pour qu'il ait tourné que de 2π s'obtiendra facilement. cette durée est $25^j,4$



Les taches paraissent comme des excavations dont le fond paraît obscur: quand une tache est au centre du soleil, elle est entourée d'une pénombre dont la largeur est à peu près uniforme. Quand la tache approche du bord du soleil, la pénombre diminue du côté du centre du soleil — au centre la tache a l'apparence a; sur le bord, la tache a l'apparence b., c'est précisément ce qui doit arriver si les taches sont des excavations dont le fond est obscur —

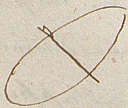


Herschell expliquait les excavations en supposant le soleil formé d'un noyau obscur entouré d'une 1ère atmosphère non lumineuse, et d'une 2e atmosphère lumineuse.

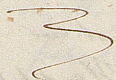


Si la atmosphère s'entr'ouvent par une cause quelconque, on verra une tache sombre au centre puis une pénombre et une atmosphère plus lumineuse.
L'atmosphère intérieure est éclairée par l'atmosphère extérieure qui est lumineuse d'elle même. Observons que de pareils déchirements ne peuvent pas avoir lieu sans qu'il y ait solutions de parties plus lumineuses. A

Un fait qui prouve que le soleil est entouré d'une atmosphère gazeuse c'est que la lumière venue du soleil n'est polarisée dans aucune direction ; la lumière émise obliquement par un corps solide incandescent est toujours polarisée ; tandis que celle provenant d'un gaz incandescent ne l'est jamais ; or M. Arago a trouvé que la lumière venant des bords du soleil, ou du centre du soleil n'est jamais polarisée. Donc on doit admettre cette probable d'une atmosphère gazeuse.

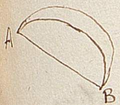


Dans les régions tropicales un peu avant le lever ou le coucher du soleil, on aperçoit une lumière ayant une forme lenticulaire ; qu'on appelle lumière zodiacale — l'axe de la lentille est l'axe de rotation du soleil. La longueur angulaire de la lentille varie de 40° à 80°, et la largeur de 8° à 30°. —



Mouvement de la lune

Chaque jour on détermine l'ascension droite et la déclinaison de la lune; seul. il y a quelq. précaut. à prendre parceque on ne voit pas généralement les deux bords — il faut déterminer d'abord le diamètre apparent de la lune — or la partie visible de la lune contient toujours au moins une demi circonférence, dont laquelle on peut tracer un diametre AB; c'est la longueur de AB qu'il faut avoir —; pour cela on se sert d'un micromètre à deux fils. on fait en sorte que l'image de AB soit comprise entre les deux fils; cela fait, on observe le temps employé par une étoile pour traverser l'espace compris entre les deux fils du micromètre, en réduisant ce temps à raison de 15° par heure on conclut la distance angulaire des deux bords de la lune —



Ayant l'ascens. droite et la déclinais., on en déduit la longitude et latitude —

La longitude de la lune varie en moyenne de 13° 10' par jour —; au bout d'un petit nombre de jours la lune aura décrit 360°; c.à.d. qu'elle sera revenue reprendre la même position relative à l'équinoxe

C'est ce qu'on appelle une révolut. tropique de la lune.

Sa durée est $\frac{360}{13°10'}$ ou 27,321255^j =

La latitude de la lune varie aussi. dans la révolut. tropique et la latitude est la moitié du temps positive, et l'autre moitié négative.

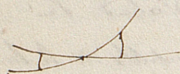
Si on construit sur un globe les différentes positions de la lune on trouve que le lieu de ces positions est sensiblement un grand cercle incliné sur l'écliptique de 5°,8',48" —

L'intersect. de ce grand cercle avec l'écliptique est appelée ligne des nœuds —

44 r

Le nœud ascendant est celui où la lune traverse l'écliptique quand sa latitude passe du ~~positif au~~ négatif au positif.

La position des nœuds s'obtiendra par l'observation de la lune avant et après le passage de la lune à son nœud absolument comme on l'a indiqué pour le soleil —



$l \quad l'$

$\lambda \quad \lambda'$ on a $\lambda : \lambda' :: l_1 - l : l' - l_1$

d'où on déduira l_1 longitude du nœud —

l'inclinaison de l'orbite lunaire se déduit des mêmes observations

$t = \frac{\lambda}{l_1 - l}$

Les deux longitudes des deux nœuds n'ont pas une différence égale à 180° — ce qui devrait arriver si la lune décrivait rigoureusement un grand cercle. Néanmoins on peut concevoir que l'orbite de la lune est plane, mais que cette orbite se déplace, de telle sorte que la ligne des nœuds se déplace que les nœuds reculent. En un an le déplacement de la ligne des nœuds est 19°, 19' 43". Ce mouvement est rétrograde, il se fait en sens contraire du mouvement du soleil, de la lune. Pour une révolution complète des nœuds il faut 18 an. $\frac{1}{2}$. — En même temps l'inclinaison de l'orbite lunaire change; cette inclinaison peut s'écarter de 9' en plus ou en moins de sa valeur moyenne.

Enfin le mouvement de la lune dans son orbite n'est pas régulier. L'accroissement de longitude est variable d'un jour à l'autre et le mouv. angulaire de la lune dans son orbite n'est pas uniforme.

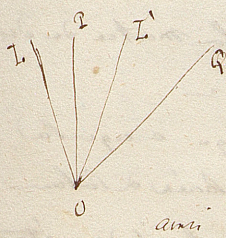
La lune ne se trouve pas placée constamment de la même manière par rapport au soleil. De là les phases de la lune —

Lignier

Cours d'astronomie.

Il importe d'examiner les variations de positions de la lune par rapport au soleil. La longitude de la lune augmente de 13°, 10'35'' par jour; celle du soleil augmente de 59'; donc la difference de longitudes est de 12°, 11' pour que la lune reprenne la même position par rapport au soleil, il faut un temps égal à $\frac{360}{12°,11'} = 29^j, 12^h, 44', 5''$. C'est la durée de la révolution synodique de la lune. Les apparences de la lune reviennent les mêmes après ce temps.

L'orbite de la lune fait toujours à peu près le même angle avec l'écliptique, mais celui qu'elle fait avec l'équateur est variable. soient OP l'axe de l'écliptique, OL celui de l'orbite lunaire, OQ celui de l'équateur. dans un petit nombre d'années on peut regarder OP et OQ comme fixes; or OL tourne autour de OP en faisant un angle de 5°, 9'. Considérons les deux positions où OL se trouve dans le plan POQ — dans la 1re posit. POL = 23°, 28' + 5°, 9'. c'est l'angle de l'orbite lunaire et de l'équateur. dans la 2e posit. QOL' = 23°, 28' − (5°, 9'). —



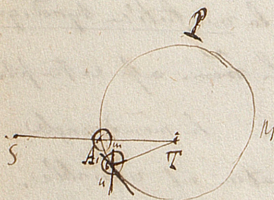
ainsi à l'a donc la lune peut donc s'approcher du zenith de 5°, 9' de plus que ne peut le faire le soleil en été; en hiver elle s'approche de l'horizon de 5°, 9' de plus que ne le fait le soleil.

On appelle phases de la lune les divers aspects de la lune; La lune est en conjonction quand sa longitude est la même que celle du soleil, — elle est en opposit. quand sa longitude est égale à celle du soleil augm. de 180° — elle est en quadrature quand sa longitude surp. celle du soleil de 90° et de 270° —

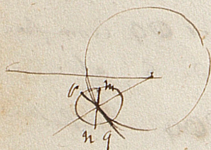
45 v

Si l'orbite lunaire se confondait avec le plan de l'écliptique à chaque conjonction il y aurait éclipse de soleil; à chaque opposition il y aurait éclipse de lune.

Au moment de la conjonction on dit qu'il y a nouvelle lune; elle est entre le soleil et la terre; on ne voit donc pas la lune. — Le jour suivant la lune se trouve à l'est du soleil soit T la terre. ALM est l'orbite lunaire; à la conjonction, les projections du centre du soleil, de la lune et de la terre se projettent suivant une droite. La partie éclairée de la lune n'est pas visible de la terre.



La lune vient en B, la ligne mn sépare dans la lune la partie éclairée de la partie non éclairée; la partie ~~visible~~ de la lune visible de la terre est la partie pmq; — par conséquent la partie pm qui est éclairée est vue de la terre. —



La lune se trouvant à l'est du soleil se couchera après lui et se lèvera après lui. —

Quand la lune sera en quadrature, la moitié du disque paraîtra éclairée. — C'est le 1er quartier —

La partie éclairée visible augm. jusqu'à ce que la diff. de longitude soit 180°; alors la partie éclairée de la lune sera entièrement visible pour nous — la diff. de longitude étant 180 la lune se lèvera à peu près quand le soleil se couchera —

La longitude augm. ensuite, même phénomène se reproduit.

Quand la lune est nouvelle et quand on n'en voit qu'un croissant, on voit le reste du disque éclairé d'une faible lumière. Cette lumière vient des ray. solaires réfléchis vers la lune par la terre. Car alors la partie éclairée de la terre est tournée vers la lune.

Il existe un rapport remarq. entre la révolut. synodique du nœud, et la révolut. synodique du nœud de la lune — on trouve

que 223 revolut. synod. de la lune = 19 revolutions synodique du nœud = 18 an 10 jours, il s'ensuit qu'au bout de ce temps la lune reprend la même position par rapport au soleil, et par rapport ~~au~~ à son nœud —; donc les eclipses doivent se reproduire dans le même ordre — en effet ~~pour qu'il~~ ~~peut~~ si a une certaine epoque la longitude du soleil a été la même que celle de la lune, au bout de 18 a 10 j, il en sera encore de même; si a la premiere epoque la lune se trouve assez près de son nœud pour qu'il y ait eclipse, au bout de 18a 10j, elle aura la même position relativement à son nœud; et puisqu'à la première epoque il y a eu eclipse, il y aura eclipse à la 2e epoque precisement au bout de 18 ans, 10 jours.

On peut encore chercher au bout de combien de temps les phases de la lune repondront aux mêmes jours de l'année; ~~par exemple on a trouvé~~ et l'on trouve que 19 années tropiques comprennent 235 lunaisons ou revolut. synodiques. — au bout de 19 années, les phases repondront aux mêmes jours de l'année. —

on designe par 1 l'année qui suit celle où le 31 decembre était jour de nouvelle lune — les ans suivants sont appelés 2, 3, 4 — 19, 1, 2.
Ce nombre est appelé nombre d'or; celui de 1852 est 10 —
L'année 1843 avait pour nombre d'or 1; le 31 decembre 1842 était jour de nouvelle lune. —

on appelle epacte d'une année le nombre de jours compris entre le 1er janvier de cette année et la dernière nouvelle lune de l'année precedente; à chaque nombre d'or repond une epacte determinée; quand le nombre d'or est 1, l'epacte est 1; les epact. se reproduisent au bout de 19 ans.

L'effet de Pâques est fixé au dimanche qui suit la pleine lune d'après le 20 mars; — par ex. si le 20 mars était jour de pleine lune, il faudrait prendre la pleine lune suivante, et prendre le dimanche suivant; si cette pleine lune tombait un dimanche, il faudrait encore prendre le dimanche suivant. —

Dist. de la lune à la terre; le diamet. app. varie; le max $= 33' 30''$; le minim $= 29' 30''$ — dans le cours d'une revolut. elle va du minimum au maximum, puis du maximum au minimum — . perigée — apogée — si la lune n'a qu'une seule revolut. le perigée et l'apogée sont sensibl. sur une même ligne passant par le centre de la terre; c'est la ligne des apsides —

Si on calcule la posit. de la lune pour chaque jour, on trouve que elle décrit une ellipse dont la terre est au foyer et ~~et dont~~ les aires décrits par le ray. vect. menées de la lune à la terre sont proportionnelles aux temps.

il s'ensuit qu'on peut calcul. la posit. de la lune approx. à l'aide des formules du mouvement elliptique

$nt = u - e\sin u$, $r = a(1 - e\cos u)$, $\mathrm{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}$

on détermine les élémts de la courbe comme pour le soleil; on a $e = 0,0635$. —

Si on embrasse plusieurs revolutions, la ligne des apsides tourne dans le sens du mouvement de la lune, de manière à faire une revolut. complète en $3232^j,57$; elle tourne de $40°$ par an — ainsi la lune décrit une ellipse; mais le plan de cette ellipse se déplace continuell. de telle sorte que la ligne des noeuds rétrograde; de plus l'ellipse est elle-même mobile et le grand axe de l'ellipse tourne dans le sens du mouv. de la lune

Lignier

Cours d'astronomie.

Inegalités — L'equat. du centre peut aller jusqu'à 6°. elle depend de θ qui est l'angle de la ligne entre la lune et le périgée.

<u>évection</u> découverte par Ptolémée; pour avoir la longitude exacte il faut ajouter à la longitude calculée par la formule elliptique, une quantité $= 1°,18' \times \sin\{2(☾ - ☉) - \theta\}$.

2(☾ − ☉) est le double de la longitude ~~du soleil~~ de la lune moins le double de la longitude du soleil. —

on voit que dans les syzigies, l'évect. diminue l'equat. du centre. — Car la diff. de longitude de la lune et du soleil est 0° ou 180°. alors évection $= -4°,18'.\sin\theta$. or si $\theta < 180$ θ-nt est > 0; donc l'evection est toujours de signe contraire à l'equation du centre — ~~[illegible]~~ aux quadratures. — l'evect. augmente l'equat. du centre aux quadratures —

<u>variation</u> découverte par Tycho Brahé; elle depend de la difference de longitude du soleil et de la lune.

variation $= 35',32''.\sin 2\{☾ - ☉\}$.

elle est nulle aux quadratures et aux syzigies; elle est maximum aux octants. —

<u>equation annuelle</u>, ~~=~~ 7',12. sin (anomalie moyenne du soleil).

voilà les inégalités de la lune en longitude —

inégalités de la lune en latitude. elle provient de la variat. de l'inclinaison de l'orbite lunaire. elle est égale à $-9' \cos 2(☉ - ☊)$; ☉ − ☊ = distance du soleil au nœud ascendant de la lune; il faut ajouter cette quantité à 5°,9'. —

les inégalités de la lune sont périodiques; il y a une autre inégalité appelée <u>inégalité séculaire</u>, elle affecte la longitude de la lune; elle a une période très longue, c'est

l'accélération du mouvement de la lune. — Si le mouvement moyen de la lune était uniforme, son mouvement moyen serait $a + bt$; pour représenter les observations il faut ajouter un terme ct^2 et si on prend pour unité le siècle, on trouve que $c = 10'',2$ si l'on cherchait la position de la lune il y a 25 siècles en lui supposant le mouv. qu'elle a actuellement on se tromperait de $10'',2 \times 625 = 6375'' = 1°$

(*) or il faut pour parcourir cet arc, 3h,13' en sorte que l'on trouverait qu'une éclipse à cette époque a eu lieu 3h 13' avant l'heure calculée. —

Dimensions absolues de l'orbite lunaire. — La dist. des astres se déduisent de leurs parallaxes. — On a trouvé ainsi

max. de la parallaxe horizontale $= 61', 24''$ } pour Paris.
mini de la parallaxe horizont. $= 53', 48''$ }

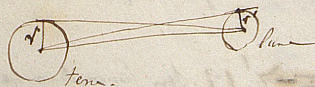
on en conclut les dist. apogée et périgée —

dist. maximum ~~apogée~~ $= 63,4\, r$ —

dist. minimum $= 56\, r$ — r = rayon moyen de la terre

La dist. moy. de la lune à la terre est $59,7\, r$; il est de 86000 lieues, ou à peu près la moitié du rayon du soleil —

Connaissant le diamètre app. et la parallaxe de la lune, on déduit le rayon de la lune. On a

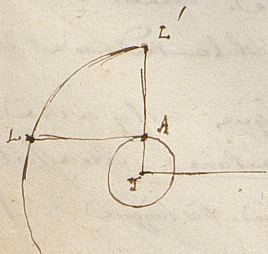


$$\frac{2r'}{d} = 31', 30 \qquad d = \text{dist. de la lune à la terre}$$

$$\frac{r}{d} = 57', 36''$$

On trouve ainsi que $\frac{r'}{r} = \frac{3}{11}$. —

La lune est assez près de la terre pour que son diamètre apparent varie pendant une journée. — La lune est à peu près à une distance constante du centre de la terre ; la lune est plus près de nous au zénith qu'à l'horizon ; son diamètre est plus grand au zénith qu'à l'horizon. quand la lune est en L à l'horizon, la distance est AL ; quand la lune est en L' au zénith, la distance est AL' ; la diff. des dist. est à peu près égale au ray. AT —



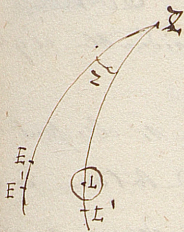
On peut se servir de la distance de la lune à une étoile pour déterminer l'heure de Paris dans un lieu déterminé. —

Dans la connaissance des temps on trouve ~~la dist~~ de 3 heures en 3 heures les distances des étoiles à la lune, ~~mais l'heure~~ telles qu'elles seraient vues du centre de la terre, mais l'heure étant l'heure de Paris. — Si on peut déterminer la distance exacte de la lune ~~à~~ à une étoile, au moyen de la connaissance des temps on déduira l'heure de Paris. —

— —

—

On mesurera la dist. ~~de la lune~~ d'une étoile au bord le plus rapproché de la lune, d'où on déduira la distance de l'étoile au centre de la lune; ~~on~~ on détermine la distance zénithale de l'étoile et celle du centre de la lune. — Les distances zénithales sont altérées par la réfraction. — ~~aux~~ distances zénithales observées ~~il faut~~ ZE, ZL il faut ajouter des correct. r et r'. Les dist. zénithales vraies seraient $ZE+r$, $ZL+r'$. — Si les astres étaient vus du centre de la terre, la distance zénithale de ~~la lune~~ l'étoile ne serait pas altérée; ~~celle de la lune le serait~~ car la parallaxe de l'étoile est nulle; la distance zénithale de la lune serait altérée, la lune serait vue plus haut, en sorte qu'il faudrait retrancher de sa distance zénithale $p = P \sin ZL'$ alors

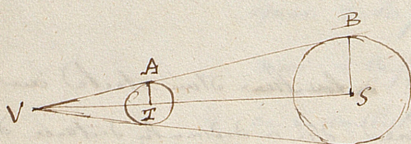


$$ZL'' = ZL + r' - p \qquad ZE' = ZE + r$$

sont les dist. zénithales exactes vues du centre de la terre;
on connaît l'angle Z; donc dans le triangle sphérique $ZE'L''$
on a $E'L'' = \cos ZE' \cos ZL'' + \sin ZE' \sin ZL'' \cos Z$
d'où on déduit la distance exacte de l'étoile à la lune et par suite l'heure de Paris. —

Eclipses de lune

La terre projette derrière elle un cône d'ombre, et un point situé dans ce cône est dans l'obscurité, — si la lune se mouvait dans le plan de l'écliptique à chaque révolution la lune se trouverait ~~dans~~ sur l'axe de ce cône, et alors il y aurait éclipse; mais la lune ne parcourt pas l'écliptique elle passe tantôt au dessus tantôt au dessous de l'axe de ce cône



de sorte que pour qu'il y ait éclipse, il faut que la latitude de la lune ne soit pas trop considérable, et que la distance de ~~la terre~~ la lune ~~soleil~~ à la terre soit plus petite la distance du centre de ~~soleil~~ la terre au sommet du cône.

R = rayon du soleil

r = rayon de la lune.

D = SI

on a la proportion $IV : SV :: r : R$.

d'où $IV : SV - IV : r : R - r$ —

$$IV = \frac{D \cdot r}{R - r}.$$

or $D = 24000r$, $R = 112r$, d'où $IV = \frac{24000r}{112r}$

donc $IV = 216r$ environ;

or la distance de la lune à la terre est de $60r$.

donc si la latitude de la lune n'est pas trop considérable il y aura éclipse de lune —

Une éclipse de lune est possible; voyons si elle peut être totale. — je suppose que du centre de la terre avec un rayon égal à la dist. de la lune à la terre on décrive une sphère qui coupe le cône d'ombre suivant un cercle CD, appelé cercle d'ombre. — si le diamètre du cercle CD est plus grand que le diamètre de la lune, il pourra y avoir éclipse totale

comme le cercle d'ombre et la lune sont à la même distance il suffit de comparer entre eux les diamètres apparents qui sont dans le même rapport que les diamètres réels —

Lignier

Cours d'astronomie

Les génératrices du cône faisant entre elles un angle très petit on peut supposer CD, AT, BS comme perpendiculaires à l'axe du cône. alors les deux triangles CHA, AKB donnent

CH : AH :: BK : AK

soit $\rho = CD$ = rayon du cercle d'ombre ; la proportion précédente devient $r-\rho : d :: R-r : D$, d'où

$r-\rho = \frac{d(R-r)}{D}$ et $\rho = r - \frac{(R-r)d}{D}$; alors en prenant le demi diamètre apparent $\frac{1}{2}\Delta = \frac{\rho}{d} = \frac{r}{d} - \frac{R}{D} + \frac{r}{D}$.

or $\frac{r}{d}$ = parallaxe horizontale de la lune, $\frac{R}{D}$ = demi diamètre apparent du soleil ; $\frac{r}{D}$ = parallaxe horizontale du soleil. —

Le maximum de Δ sera $\Delta = 2(61'24''+9'') - 31'31'' = 1^\circ 31' 35''$

le minimum de Δ sera $\Delta = 2(53'48''+8'') - 32'36'' = 1^\circ 15' 35''$

or le diamètre apparent de la lune n'est que de 36' à peu près ; donc elle peut être contenue entièrement dans le cône d'ombre, donc il peut y avoir éclipse totale (*)

(*) et jamais éclipse ~~totale~~ ~~partielle~~ annulaire

Pour une pleine lune donnée, y aura-t-il éclipse ? il faut que la latitude de la lune ne soit pas trop grande ; il faut que la distance du centre de la lune au centre du cercle d'ombre ou la latitude de la lune ne surpasse pas sensiblement la demi somme des ~~deux~~ diamètres apparents de la lune et du cercle d'ombre. il n'est pas nécessaire que la latitude soit plus petite que la demi somme des diamètres apparents. Elle pourrait être un peu plus grande, et malgré cela il pourrait y avoir éclipse. Car si au moment précis de l'opposition le cercle de la lune et le cercle d'ombre ne se coupent pas, il peut très bien se faire qu'un peu avant il y ait eu éclipse partielle de lune ×. Cherchons entre quelles limites la latitude de la lune doit varier pour que à une pleine lune donnée il y ait éclipse.

× Car la lune ne se meut pas parallèlement à l'écliptique.

49v

Le maximum de Δ est $1°, 31', 35''$ —

Celui du diametre app. de la lune est $33', 30''$. —

le maximum de la somme sera $\frac{1}{2}(1°, 31', 35'' + 33', 30'') = 1°, 2'$

minim. du diametre app. du soleil =

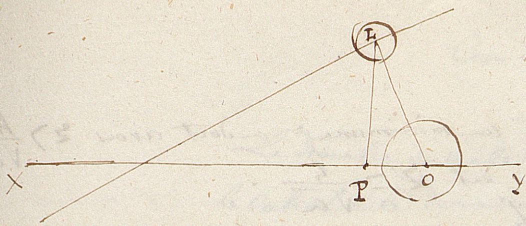
minim du diametre app de la lune =

Donc le minimum de la demi somme sera $52', 24''$. —

ainsi pour qu'il y ait éclipse, la latitude de la lune ne devra pas surpasser un certain angle qui suivant les cas varie de $1°, 2', 32$ à $52', 24''$. — ainsi à une pleine lune donnée, on calculera la valeur de la demi somme précédente et on verra si la latitude de la lune ne surpasse pas cette limite.

Calculons maintenant les circonstances de l'éclipse. Dans la connaissance des temps on trouve la latitude et longitude du soleil et de la lune de 3 heures en 3 heures; on peut en déduire l'instant précis de l'opposition. —

Soit t le temps compté à partir de l'heure de la connaissance des temps qui précède l'opposition. — pour $t = 0$, on trouvera dans la conn. de temps, le diametre app. de la lune, δ; le chose necess. au diametre apparent du cercle d'ombre Δ; on aura aussi la longitude du soleil; et en y ajoutant $180°$, on aura la longitude du centre du cercle d'ombre, L; soit l la longitude de la lune; λ la latitude de la lune — celle du soleil est 0. au moment aussi la quantité dont la longitude du soleil s'accroit dans l'unité de temps; soit M ce mouvement du soleil en longitude; soit de même, m le mouv. en longitude ~~de la lune~~; et μ le mouvement de la lune en latitude. Tous ces nombres sont relatifs à l'époque t.



Soit l'écliptique X Y à l'époque t le cercle d'ombre a son centre en O ; le centre de la lune est en L ; soit $z = LO$ abaissons LP perpend. sur le plan de l'écliptique ; on aura triangle rectangle dont on connait deux cotés. c'est le triangle POL. en effet OP c'est la longitude du cercle d'ombre, moins la longitude de la lune. or à l'époque t la longitude du centre d'ombre est $L + Mt$. à la même époque la longitude du centre de la lune est $l + mt$. donc

$$OP = L - l + (M - m)t.$$

on a aussi $LP = \lambda + \mu t$. soit $OL = z$.

~~Donc~~ à l'époque t on aura

(1) $$z^2 = \{L - l + (M - m)t\}^2 + (\lambda + \mu t)^2 = at^2 - 2bt + c$$

en posant

$$a = (M - m)^2 + \mu^2$$

$$-b = (L - l)(M - m) + \lambda\mu$$

$$c = (L - l)^2 + \lambda^2.$$

l'équat. (1) nous donne z pour une valeur donnée de t. cherchons la valeur de t correspondant à une valeur donnée de z, on aura

$$t = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac + az^2}}{a}$$

ou $$t = \frac{b \pm \sqrt{az^2 - h^2}}{a}$$

en posant $-h^2 = b^2 - ac$.

$$h = \lambda(L - l) - \mu(L - l).$$

z a évidemment un minimum; on doit avoir $z > \frac{h}{\sqrt{a}}$. la valeur minimum est $z' = \frac{h}{\sqrt{a}}$.

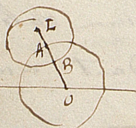
Si l'on a $\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{1}{2}(\Delta+\delta)$, il y aura éclipse. —

l'époque où l'éclipse devient la plus complète, est celle où z est minimum. cette époque est $t = \frac{b}{2a}$.

on peut avoir l'époque du commencement et de la fin. a ces deux époques on a $z = \frac{\Delta+\delta}{2}$; alors en substituant dans on aura pour t deux valeurs t' et t''. l'une sera l'époque du commencement; l'autre, l'époque de la fin de l'éclipse. —

on peut voir si l'éclipse sera partielle ou totale; il faut voir pour cela si les deux cercles peuvent être intérieurs; il faut voir si $\frac{h}{\sqrt{a}} > \frac{\Delta-\delta}{2}$, éclipse partielle; si $\frac{h}{\sqrt{a}} < \frac{\Delta-\delta}{2}$ il y aura éclipse ~~partielle~~ totale. —

a une époque q.q., on peut demander quelle est la partie de la lune qui est éclipsée; c'est la portion du diamètre AB dirigé suivant la ligne des centres et compris dans le cercle d'ombre; il faut connaître AB. or



$$AB = LB - LA = \frac{\delta}{2} - LA$$

$$LA = z - AO = z - \frac{\Delta}{2}, \text{ d'où } AB = \frac{\delta}{2} + \frac{\Delta}{2} - z.$$

Ce qui fait connaître AB. —

Pour un point donné de la terre, l'éclipse sera-t-elle visible? il faut qu'au moment de l'éclipse, la lune soit au dessus de l'horizon du lieu. — or la connaissance des temps indique l'heure et le coucher de la lune; ~~pour~~ pourra donc savoir si pour un lieu donné, au moment de l'éclipse, la lune sera au dessus de l'horizon du lieu —

Legnier

Cour d'astronomie.

Le diamètre du cercle d'ombre doit être plus ou plus grand que le calcul ne le donne réellement. Car la terre est entourée d'une atmosphère qui affaiblit l'intensité des rayons lumineux surtout près de la surface de la terre de sorte que les choses se passent comme si le rayon de la terre était un peu plus grand qu'il n'est réellement, les astronomes ont trouvé qu'il fallait augmenter Δ de $1',40''$. —

Avant que la lune soit éclipsée, son éclat diminue. C'est en effet ce qui doit arriver, car quand un point ne reçoit plus tous les rayons du soleil, il est moins éclairé que quand il recevait tous les rayons. Ainsi un point situé dans l'intérieur du cône circonscrit extérieurement à la terre et au soleil ne reçoit des rayons que d'une partie du soleil. — Ce cône prend le nom de pénombre. — On déterminera le moment où la lune entre dans la pénombre, comme on a déterminé le moment où la lune entrait dans le cône d'ombre. — Il y aura un signe à changer; on avait

$\frac{1}{2}\Delta$ = parall. horiz. de la lune + parall. horiz. du soleil − ½ diamet. app. du soleil.

on aura $\frac{1}{2}\Delta'$ = + + +

Nous avons vu qu'au bout de 18 ans 10 jours les éclipses de lune se reproduisent dans le même ordre; dans 18 ans il y a 29 éclipses de lune.

On peut se demander quelle circonstance auraient lieu pour un observateur placé à la surface de la lune. Pour lui la terre s'interposerait entre la lune et le soleil, et alors il y aurait éclipse de soleil. — Il peut se faire que pour un point de la lune il y ait éclipse partielle de soleil sans qu'il y ait éclipse de lune; ceci tiendra simplement à ce que la lune passera dans la pénombre. —

51 r°

Éclipse de soleil —

C'est en conjonction que les éclipses peuvent arriver. —

Soit à ce moment S le soleil, L la lune ; imaginez le cône extérieur circonscrit au soleil et à la lune ; la lune étant plus petite que la terre, la terre ne pourra jamais être entièrement dans le cône obscur ; donc l'éclipse ne sera totale que pour un petit espace de la terre, qui sera situé dans le cône d'ombre.

Pourra-t-elle être partielle pour toute la terre ? pour cela imaginons le cône circonscrit extérieur ; c'est de l'intérieur de celui-ci que l'on ne voit pas le soleil tout entier. — Imaginez la section de ce cône faite à la distance de la terre ; soit EF le rayon de cette section ; les triangles EBH, BKC donnent

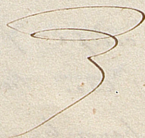
$EH : d :: R + r' : D - d$. d'où

$$EH = \frac{(R+r')d}{D-d}$$

alors $$EF = r' + \frac{d(R+r')}{D-d} = r' + \frac{d \times R}{D} \text{ approximativement}$$

$$EF = \frac{3}{11} r + \frac{112}{400} r = \frac{55}{100} r. \text{ —}$$

Ainsi le rayon du cercle de pénombre est plus petit que celui de la terre : donc il ne peut y avoir éclipse partielle de soleil dans tout un hémisphère à la fois.



pour qu'il y ait eclipse de soleil il faut que la terre atteigne le cône de penombre. —

tracé le soleil et la terre et imaginé le cône circonscrit exterieur à la terre et au soleil ; si la lune ne penètre pas dans ce cône, il n'y aura pas eclipse de soleil ; — pour que la lune penètre dans ce cône d'ombre, il faut que la latitude de la lune ne surpasse pas une certaine limite. il s'agit de trouver cette limite ; pour cela du centre de la terre décrivons un cercle avec un rayon egal à la distance de la lune à la terre. alors il faut que la latitude de la lune soit moindre que la 1/2 somme du diametre apparent de la lune et du cercle EE', calculons donc l'angle $E'TE$. par B menons une parallele à la ligne des centres. — en posant $EE' = \rho_1$

on a $\rho_1 - r : R - r :: d : D$

d'où $\rho_1 = r + \dfrac{(R-r)d}{D}$

d'où $\frac{1}{2}\Delta_1$ ou $\dfrac{\rho_1}{d} = \dfrac{r}{d} + \dfrac{R}{D} - \dfrac{r}{D}$

$\dfrac{r}{d}$ = parall. horizontale de la lune

$\dfrac{R}{D}$ = demi diametre app. du soleil

$\dfrac{r}{D}$ = parall. horizontale du soleil

alors il faut que la latitude de ~~la lune~~ soit plus petite que $\dfrac{\Delta_1 + \delta}{2}$.

max. de $\dfrac{\Delta_1 + \delta}{2} = 1^\circ, 34', 19''$

min. $= 1^\circ\ 24', 9''$.

on pourrait déterminer les points de la terre pour lesquels il y a eclipse, nous ne le ferons pas ce calcul

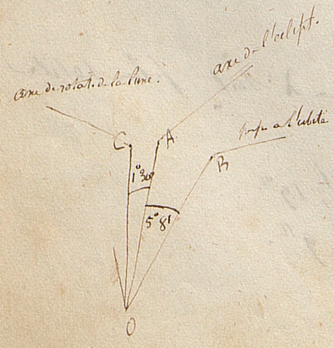
il peut y avoir des eclipses totales, et des eclipses annulaires.

On voit en comparant les valeurs limites de λ dans le cas d'une eclipse de lune et dans le cas d'une eclipse de soleil, que les limites sont plus éloignées dans le cas d'une eclipse de soleil; pour la lune cette limite moyenne est 57'; pour le soleil elle est 89'. — ceci montre que les eclipses de soleil doivent être plus fréquentes que celles de lune il y a en effet 41 eclipses de soleil et 29 eclipses de lune. mais en un lieu donné de la terre les eclipses de soleil sont moins fréquentes que celles de lune.

Mouvement de la lune sur elle même; —

La lune offre toujours la même face; on conclut de là qu'elle doit tourner sur elle même, et dans un temps precisement égal à celui de sa revolution sidérale —

on peut det. l'axe autour duquel se fait la rotation de la lune sur elle même; on a reconnu que le plan de l'eq. lunaire le plan de l'orbite lunaire, et le pl. de l'ecliptique sont toujours telles, que les intersect. de l'un de ces plans par les deux autres sont parallèles entre elles. — ce qui peut s'énoncer: si par un point on mène une perpend. à l'ecliptique, une 2e perpend. OB à l'orbite lunaire, une 3e droite qui est l'axe de la lune, ces trois droites seront touj. dans un même plan, et l'axe de l'ecliptique est compris entre les deux autres droites.



Lignier

Cours d'astronomie

La partie visible de la lune n'est pas toujours exactement la même. Sur les bords du disque il y a des parties qui sont tantôt visibles tantôt invisibles. — C'est la libration. On peut s'en rendre compte —

L'axe de la lune n'est pas tout à fait perp. au plan de l'orbite; si donc cet axe est à un certain époque dans le plan perpend. à l'orbite de la lune passant par la terre, la partie visible de la lune renfermera une des extr. de l'axe, et l'autre extrémité ne sera pas visible — au bout d'une demi révolution c'est l'extr. B qui sera visible, l'extrémité A' sera visible. Si donc du point A comme pôle on décrit un arc avec une ouverture égale à 6° 39' on aura une petite zone qui sera tantôt visible tantôt invisible — C'est la libration en latitude

Il y a la libration en longitude — Supp. l'axe de la lune perpendicul. au plan de son orbite. Si la rotat. de la lune autour de son axe était uniforme et si en même temps le mouv. angul. de la lune autour de la terre était uniforme la lune présenterait toujours la même partie — Mais le mouv. angulaire de la lune aut. de la terre n'est pas uniforme; c'est ce qui produit la libration en longitude —

Au moyen de lunettes on a pu étudier la surface de la lune; on a vu des aspérités des montagnes dont on a pu mesurer la hauteur — Au centre de ces montagnes se trouvent des espèces de cratères de volcans — Il n'y a pas d'atmosphère; dans les phases de la lune on observe que la ligne de séparation d'ombre et de lumière est nette, ce qui n'aurait pas lieu s'il y avait une atmosphère produisant un crépuscule —; de plus les rayons lumineux venant des étoiles et passant près de la lune n'éprouvant aucune réfract. sensible —

Planètes —

Dans la lunette elles ont un diamètre apparent ; elles ne scintillent pas comme les étoiles — elles ont un mouvement propre sur la sphère céleste

Planètes principales dans l'ordre de leur distance au soleil
Mercure, venus, terre, mars, flore, victoria, vesta, iris, metis, hébé, parthenope, astrée, junon, ceres, Pallas, hygie — . Jupiter, saturne uranus, neptune. —

On détermine jour par jour l'asc. droite et la déclinaison ; on a calculé la longitude et la latitude —

On trouve que les planètes ne s'écartent pas de l'écliptique ; la latitude d'une planète est généralement comprise entre + 9° et - Cette bande est le zodiaque — La latitude pour chaque planète, est tantot positive tantot negative — nœud ascendant nœud descendant de la planète. — L'interv. de temps entre les deux passages d'une planète à ses nœuds ~~sont égaux~~ égaux

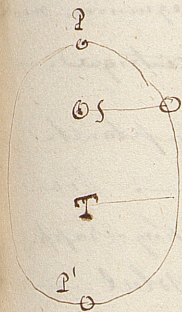
Pour le mouvement en longitude, le mouv. des planètes est tantot direct, tantot retrograde. pendant le mom. de changement elle paraît stationnaire ; cepend. le mouv. direct finit touj. par l'emporter sur le mouv. retrograde. —

Qlq. unes des planètes présentent des phases comme la lune ce qui montre qu'elles sont éclairées d'ailleurs ; elles sont très visibles pour Vénus. — On observe que cette planète est tantot d'un coté du soleil tantot de l'autre côté. sa distance angulaire au soleil varie — . elle est d'abord en on voit une partie du disque éclairée. la planète se mouvant vient en conjonction, ~~la planète est éclipsée~~, la planète est éclairée ; — puis la partie éclairée va en diminuant. enfin la planète passe entre le soleil et la terre, et alors on ne la voit plus. —



Ceci indique que Venus tourne autour du soleil —
Il en est de meme de mercure; ces deux planetes sont dites inferieures. —

pour les autres planetes leur distance angulaire au soleil peut avoir une valeur quelconque. — voici ce qu'on observe. — la planete je supp. est en conjonction, elle est complet. éclairée; la planete s'écarte du soleil, la partie éclairée diminue sensiblement; quand la planete est a 90° du soleil la partie éclairée atteint son minimum qui est > la moitié du disque; le mouv. continue; la planete vient en opposition et le disque est completement eclairé —; ces phases ne sont guères sensibles que pour mars qui est très pr. du soleil; pour les autres planetes qui sont très eloig. du soleil, les phases sont peu sensibles —



La variat. des distances des planetes a la terre est indiquee deja par les phases des planetes; quand Venus et Mercure n'est jamais d'opposition. elle est en conjonct. inferieure quand elle est entre le soleil et la terre; et en conjonction superieure — c'est quand le soleil est entre la planete et la terre. —

Le diametre app. de Venus varie de 60″ à 12″
Mercure. 12″ à 5″ —
Mars. 18″ à 4″.

On est amené à conduit à penser que c'est autour du soleil que les planetes ont un mouvement régulier; il faut donc rapp. le mouv. de la planete par un observ. placé au centre du soleil —

Latitude, longitude géocentrique, sont celles pour un observat. placé au centre de la terre —

54 r

il conviendra de chercher la latitude et la longitude telles qu'elles seraient du centre du soleil; on les appelle latitude, longitude géocentriques. — Si par le centre du soleil on mène un grand cercle perpendicul. au plan de l'écliptique et passant par la planète, l'arc compris entre la planète et l'écliptique sera la latitude héliocentrique; l'angle compris entre le pied de cet arc et une parallèle à la ligne des équinoxes menée par le centre du soleil est la longitude héliocentrique. —

Si à cela on joint la distance de la planète au soleil, on aura déterminé la position de la planète. Si on détermine ces coord. pour une planète, à d. époq. rapp. on aura le mouv. de la planète autour du soleil —

il faut donc déterminer les coord. héliocentriques. — Si on avait la parallaxe horizontale de la planète, on en conclut la distance de la planète à la terre pour chaque observation; supp. cela connu. — soit T la terre; soit $T\gamma$ ligne des équinoxes; le papier est le pl. de l'écliptique — $ST\gamma$ est la longitude L du soleil — soit P la posit. de la planète; soit Q sa project. sur le plan de l'écliptique; je joins P et Q au cent. de la terre T; $QT\gamma$ est la longitude géocentrique l; PTQ = latitude géocentrique de la planète $= \lambda$ ... — on connait $PT = r$ dist. de la planète à la terre — cela posé on peut déter. les coord. héliocentriq. joig. P a S; $SP = r'$ inconnue — joig. S a Q et men. $S\gamma'$ parallèle à la ligne des équinoxes. cela $QS\gamma' = 2\pi$ − longitude héliocentrique $= 2\pi - l'$. $PSQ = \lambda'$ est la latitude héliocentrique; il faut

T

P

S

Q

l'

γ

γ'

/

Lignier

Cours d'astronomie.

déterminer r', l', λ'. — dans le triangle QTS on

connait $QTS = L - l$; $TS = R$ dist. du soleil à la terre.

$TQ = r \cos\lambda$. —

on déduit SQ ; TSQ = ~~...~~

~~...~~. connaissant TSQ, on connait $QSy' = \pi - L - TSQ = 2\pi - l'$

d'où $l' = \pi + L + TSQ$ —

dans le triangle PQS on ~~a QS~~ connait SQ, et $PQ = r \sin\lambda$.

le triangle est rectangle en Q ; donc on peut avoir l'angle en S

ou la latitude héliocentrique. — dans ce même triangle on a

$SP = \frac{SQ}{\cos\lambda'} = r'$; on connaitra donc r' l' λ'. —

mais on détermine diff. la parallaxe de la planète

il y a une époque où l'on peut se passer de la parallaxe ;

c'est celle où la distance angulaire de la planète au soleil est

maximum (ceci ne s'applique qu'aux planètes inférieures.) —

quand la planète est à sa dist. ang. maximum, c'est que

SP est à peu près perpendiculaire à PT ; donc ce moment

TPS étant rectangle on aura

$$TP \text{ ou } r = ST \cos PTS = R \cos PTS.$$

imag. le triangle solide $TPQS$; imag. le triangle sphérique

rectangle correspondant ; l'angle dièdre TQ est droit.

$$\cos PTS = \cos PTQ \times \cos QTS = \cos\lambda \cos(L-l)$$

donc

$$r = R \cos\lambda \cos(L-l).$$

Donc r est connu et c'est inutile de supposer connue la

parallaxe ; mais ceci suppose l'observ. faite au moment de

la plus grande élongation. — Comme la plus grande élongation

55 v

se reproduisent assez souvent, et répondent à des points différents de la planète, on pourra calculer les coord. héliocentr. de la planète pour un grand nombre de ses points, ce qui fera connaître d'une manière approchée le mouv. de la planète.

Manière plus expéditive : admett. que les plan. le mouvement du mouvement elliptique. et propos. nous de déterminer les constantes de ce mouvement, et reste à vérifier par l'expérience l'exactitude de l'hypothèse faite.

Il y a 7 éléments à déterminer

le temps de la révolution T; le demi grand axe a

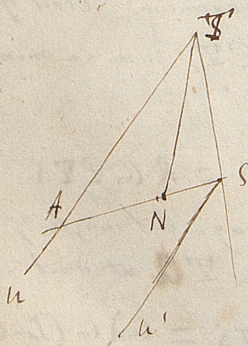
l'excentricité e, l'époque du passage de la planète au périhélie

ω = angle que le rayon mené du soleil au périhélie fait avec le rayon mené du nœud

α = angle que le nœud ascendant fait avec la ligne des équinoxes. —

γ = inclinaison de l'orbite sur le plan de l'écliptique

Commençons par la longitude du nœud. — soit ♈ la ligne des équinoxes S le soleil —. N la planète au moment où elle est dans le pl. de l'écliptique, c. à. d. son nœud — soit Su' parallèle à la ligne des équinoxes la longitude du nœud est α, et l'angle $NSu' = 2\pi - \alpha$. — or dans le triangle ♈NS on connaît R, A♈S, et A♈N.



dans le triangle ♈NS on connaît R, la longitude du soleil $A♈S = L$, la longitude de la planète $A♈N = l$; de sorte que $N♈S = L - l$.

Voy. quelle est la valeur de ♈SN. or cet angle angle augmenté de $(NSu' + L)$ est égal à ϖ

ainsi $\Upsilon SN + NSu' + L = \Upsilon SN + 2\pi - \alpha + L = \varpi$.

d'où $\Upsilon SN = \alpha - L - \varpi$. or on a $\frac{SN}{S\Upsilon} = \frac{\sin(L-l)}{\sin(\alpha - l - \varpi)}$

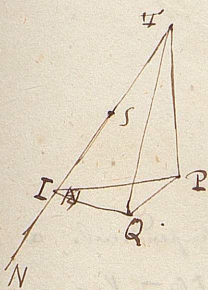
ou $\frac{SN}{R} = \frac{\sin(L-l)}{\sin(l-\alpha)}$. on observe un 2e passage de la planète à son nœud; α reste le même, SN aussi on aura $\frac{SN}{R_1} = \frac{\sin(L_1 - l_1)}{\sin(l_1 - \alpha)}$

d'où $\frac{\sin(l_1-\alpha)}{\sin(l-\alpha)} = \frac{R_1}{R}\frac{\sin(L_1-l_1)}{\sin(L-l)}$. d'où on déduit α —

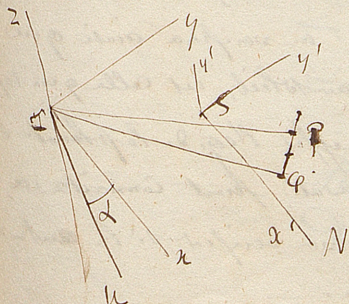
R et R_1 sont connus; ce sont les distances du soleil à la terre. —

Inclinaison: on choisit le moment où la longitude du soleil est égale à la longitude héliocentrique du nœud; c'est à dire celui où la terre se trouve sur la ligne SN. à ce moment la planète n'est pas à son nœud —. à ce moment la planète est en P hors du plan de l'écliptique; abaissons PQ perpendiculaire sur le plan de l'écliptique. menons QI perpendiculaire à SN — puis joignons PI; l'angle PIQ est l'angle de l'inclinaison. — Considérons l'angle trièdre Υ, rectangle suivant ΥQ. — on a la relation $tg\, Q\Upsilon P = tg\, \gamma \sin I\Upsilon Q$. ou $tg\lambda = tg\,\gamma . \sin I\Upsilon Q$.

d'où $tg\,\gamma = \frac{tg\lambda}{\sin I\Upsilon Q}$.



Ces deux éléments déterminés on peut déterminer les trois coordonnées héliocentriques — soit T la terre, par T je mène une droite parallèle à SN ligne des nœuds; cette droite Tx sera l'axe des x. je mène Ty perpend. à Tx dans le plan de l'écliptique; puis Tz perpend. au plan de l'écliptique; par S imaginons 3 axes Sx' Sy' Sz' parallèles aux axes qui passent en T. soit P la planète; Q sa projection sur le plan de l'écliptique



56v

l'ancienne abscisse est égale à la ~~project~~. somme des project.
de TS et SP sur TX. donc

$$x = R\cos(L-\alpha) + x'$$

de même $$y = R\sin(L-\alpha) + y'$$

$$z = z'.$$

si du point P on abaisse PQ perpend. sur le plan de l'éc[…]
si $\rho = TQ$, on aura

$$x = \rho\cos(l-\alpha)$$
$$y = \rho\sin(l-\alpha)$$
$$z = \rho\, tg\,\lambda.$$

d'où
$$x' = \rho\cos(l-\alpha) - R\cos(L-\alpha)$$
$$y' = \rho\sin(l-\alpha) - R\sin(L-\alpha).$$
$$z' = \rho\, tg\,\lambda..$$

on peut déterminer ρ. — menons QI perpendicul. à SN
dans le triangle rectangle PQI on aura PIQ = γ.—

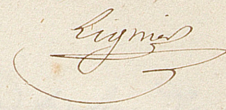
dans PQI on a $z' = y'\, tg\,\gamma$ et γ est déjà connu.
on élimine ρ et on aura x' y' z'. —; cela suppo[…]
qu'on ait déterminé α et γ. —

(1) $\sin\lambda' = \sin PSQ$.—

Connaissant les coordonnées héliocentriques δ', $\sin\lambda' = \frac{z'}{\delta'}$ (1)
et la longitude héliocentrique ×. on vérifiera ainsi que la
position de la planète par rapport au soleil, est celle qui répon[…]
au mouvement elliptique; en effet l'eq. de la planète […]
$\delta' = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}$ trois observati. feront connaître a, e,
QSI et l'angle $(v-\omega)$; on pourra vérifier si les autres va[…]
trouvées conviennent à l'équation. —

× $QSI = \frac{QI}{IS} = \frac{z'}{x'\, tg\,\gamma}$

Cours d'astronomie



De cette suite d'observation on a conclu que les orbites des planetes sont peu inclinées sur le plan de l'ecliptique de plus les planetes parcourent leurs orbites dans le même sens. enfin les durées de revolution sont liées aux grands axes par la 3e loi de Kepler —

Il y a une loi empirique, loi de Bode, qui sert a se rappeler les distances des planetes au soleil — imaginons une suite de nombres dont les deux premiers sont 0 et 3 et les autres s'obtiennent en doublant toujours a partir de 3 —

0 3 6 12 24 48 96 192, 384 —

ajoutons 4 à chaque terme — on aura la suite

4	7	10	16	28	52	100	196	388
Merc.	Venus	terre	Mars	Petites planetes.	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune.
3,87,	7,23,	10	15,24	28	52,03	95,39	191,82,	338 —

La 3e ligne exprime les rapports des distances des planetes au soleil —

On peut se rendre compte du mouvement des planetes tel qu'il est vu de la terre. Suppos. que le soleil soit immobile en S., traçons les orbites de la terre et de Venus; on a la relation $T^2 : T'^2 :: a^3 : a'^3$ d'où —

$$T : T' :: a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}}$$

Les vitesses angulaires sont $n = \frac{2\pi}{T}$ $n' = \frac{2\pi}{T'}$

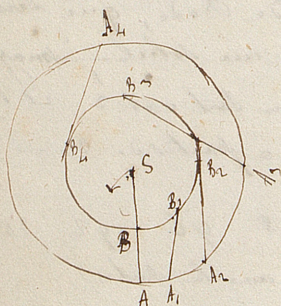
D'où il résulte $n : n' :: a'^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$

Le chemin absolu parcouru par la terre dans l'unité de temps sera na. pour Venus ce sera $n'a'$; on aura donc $an : a'n' :: aa'^{\frac{3}{2}} : a'a^{\frac{3}{2}}$

ou $an : a'n' :: \sqrt{a'} : \sqrt{a}$

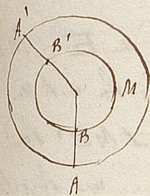
or $a > a'$; donc $a'n' > an$. ainsi la vitesse absolue de Vénus est plus grande que la vitesse absolue de la terre. — et de même la <u>vitesse absolue</u> d'une planète sera d'autant plus grande qu'elle sera plus rapprochée du so[leil]

Supposons la terre et Venus en conjonction en A et au bout d'un temps assez court Venus se trouvera en B_1, terre en A_1, or $BB_1 > AA_1$, par suite le rayon AB semble avoir marché dans le sens de la flèche, le mouvement semblera rétrograde. — ainsi peu de jours après la conjonction Venus semblera rétrograder ; car cette avance de Venus sera en sens inverse de celle que le soleil [~~p~~]semble prendre sur la terre qui a lieu dans le sens indiqué par la flèche passant en il y aura rétrogradation tant que la droite qui joint la terre à Venus sera avec la droite qui les joignait la veille un angle situé à droite de cette ligne ; et il y aura mouvement direct quand cet angle sera à gauche. — il arrivera un moment où A_2B_2 sera tangente BB_1B_2 — alors pendant quelques jours le mouvement ~~sera~~ semblera stationnaire. puis il deviendra direct jusqu'à ce que A_4B_4 soit encore tangent au BB_1B_2 — alors le mouvement semblera stationnaire — après un temps considérable la somme des mouvements directs l'emporte toujours sur celle des mouvements rétrogrades. —



La révolution synodique d'une planète est le temps que la planète met à reprendre la même position par rapport au soleil et à la terre. —

Cherchons la ~~revoli~~ durée d'une révolut. synodiq. qui surpasse celle d'une révolution réelle de la planète.



quand Venus aura fait une revolution la terre sera loin d'en avoir fait une. la conjonction aura AB' et la terre aura tourné de moins d'une circonférence; la planete aura tourné d'une circonference et de plus de l'angle BMB'. Soit τ la ~~temps~~ durée de la revolution synodique, n et n' les vitesses angulaires de la terre et de Venus; $n' > n$. il est evident que l'angle decrit par Venus surpasse de 2π celui qu'a decrit la terre dont l'expression est $n\tau$. on a donc l'equat.

$$n'\tau = 2\pi + n\tau.$$

d'ou $$\tau = \frac{2\pi}{n'-n} = \frac{1}{\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}}.$$

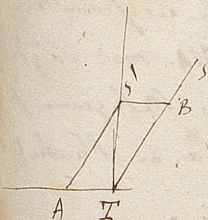
τ pour Venus est de 584 jours

Pour le detail concernant les planetes voir le traité d'astronomie.

emploi du passage de Venus sur le disque du soleil pour avoir la parallaxe du soleil —

vitesse de la lumière determinée par l'observation des satellites de jupiter —

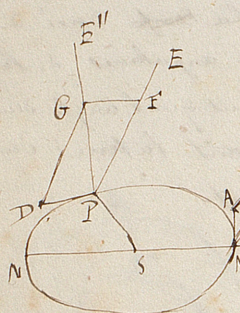
Rotation de la terre demontrée d'apres l'aberration de la lumière — Soit ST un rayon de lumière envoyé a la terre en T. la terre est animée d'une certaine vitesse d'environ 7000 lieues par seconde que nous representerons par TA. soit TB la vitesse de la lumière, pour l'oeil de l'observateur l'effet produit sera le même que si la lumière arrivait a l'oeil supposé immobile suivant la diagonale du parallelogramme construit sur les deux vitesses — la lumière semblera arriver suivant S'T, l'etoile paraitra deplacée —



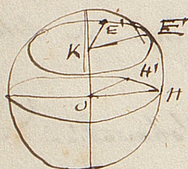
58 r

Soit NEM le plan de l'écliptique — ; pris NM l'intersection du plan ~~vertical~~ passant par l'étoile E, la terre M et le soleil S.

Soit donc l'étoile en M ou plutôt en E. ME direction de son rayon lumineux ; en faisant sur les vitesses MA et MB le parallélogramme, on aura suivant ME' la ~~véritable~~ position apparente de l'étoile. — elle a donc une longitude différant de la longitude vraie d'un petit angle ; quant à la latitude elle n'est pas sensiblement altérée. —



Soit $\varepsilon = EMB$. dans le triangle BMC on a $\sin\varepsilon$ ou $\varepsilon = \frac{BC}{BM} = \frac{u}{V}$, cet angle ε n'est pas ~~l'attraction~~ l'altération de la longitude. pour avoir cette altération imaginons une sphère et soit EE' l'arc de ~~l'ap~~ parallèle correspondant à ~~l'autre figure~~ l'angle EME' de l'autre figure — cet arc se confond sensiblement avec l'arc de grand cercle qui mesure le déplacement réel de l'étoile et qui a pour mesure $\frac{u}{V}$. Or l'aberration en longitude est mesurée par l'angle au centre EKE' ou $\frac{EE'}{EK} = \frac{u}{V\cos\lambda}$, en appelant λ la latitude de l'étoile E, ainsi l'aberration en longitude est $\frac{u}{V\cos\lambda}$, — l'aberration en latitude est nulle, et l'aberrat. réelle est $\frac{u}{V}$.



Six mois après les choses se passent de même, but ce n'est que l'aberration en longitude a lieu en sens contraire en effet en N le rayon lumineux de l'étoile est parallèle à EM, la vitesse de la terre est égale à MA mais dirigée en sens contraire — donc la diagonale du parallélogramme fera le même angle avec le rayon lumineux mais de l'autre côté l'aberrat. en longitude sera $-\frac{u}{V\cos\lambda}$

Lignes

Cours d'astronomie

ou le interne est perpend. à DA

Qu'arrivera-t-il aux époques intermédiaires: supposons la terre en P'. Soit DPE le plan contenant l'étoile et le parallélogramme, ce plan est perpend. au plan de l'écliptique donc la longitude n'est pas altérée tandis que la latitude est altérée de l'angle GPF = δ. on aura

$$\sin \delta : \sin d :: u : V \quad \text{d'où} \quad \delta = \frac{u \sin d}{V}$$

telle est l'aberrat. en latitude — Six mois après la latitude sera diminuée d'une quantité égale et contraire — à ces deux positions l'aberrat. en longitude est nulle — aux époques intermédiaires, il y a aberration en longitude et en latitude; il en résulte que l'étoile semble décrire autour de sa position réelle une petite courbe.

Cherchons la dimension de cette courbe. Dans le sens perpend. à l'écliptique la dimension de cette courbe est double de l'aberration en latitude, elle sera donc $\frac{2u \sin d}{V}$. — dans le sens parallèle à l'écliptique la dimension de la courbe sera $\frac{2u}{V}$; ces lignes sont d'ailleurs des axes; c'est le diamètre $\frac{2u}{V}$ parallèle à l'écliptique qui est le grand axe. Chaque étoile décrit chaque année autour de sa position réelle une courbe une ellipse dont le grand axe est parallèle à l'écliptique

Si $d = 90$ cette ellipse deviendra un cercle; les étoiles situées près du pôle semblent donc décrire des cercles; au contraire l'ellipse s'aplatira de plus en plus à mesure que d diminuera; ainsi les étoiles situées près de l'écl. semblent décrire des droites —

Ce qu'il faut remarquer c'est que le petit axe seul varie avec la latitude; le grand axe est le même pour toutes les étoiles — Calculons sa longueur. —

59 v

$$\text{ou a} \quad u = \frac{2\pi a}{T}$$

60 r

N°2

Ro Cours de M. Bertrand

Problèmes

62v

Mécanique

On dit qu'un corps est en mouvement quand il occupe successivement plusieurs points de l'espace. Nous n'avons pas de moyen de juger du mouvement absolu d'un corps. Les mouvements que nous apercevons à la surface de la terre ne sont que des mouvements relatifs. — Nous dirons de même qu'un corps est en repos quand il conserve la même position relativement à d'autres corps qui nous semblent fixes. — Mais ce repos n'est encore qu'un repos relatif. —

L'expérience nous apprend que lorsqu'un corps a été déplacé il a été soumis à l'action d'une cause extérieure. Cette cause a été appelée force. À la vérité ce n'est qu'un mouvement relatif; mais par induction nous rapportons ce fait au mouvement absolu. Un corps ne peut se mouvoir que s'il est sollicité par une force. —

L'inertie de la matière consiste en ce qu'un corps ne peut modifier par lui même ni son état de repos, ni son état de mouvement.

Lorsque plusieurs forces agissent simultanément sur un corps, l'expérience nous apprend que les diverses parties du corps ne cèdent pas isolément à l'action des forces qui leur sont appliquées. Le corps prend un certain mouvement; il peut arriver que ~~l'état~~ les forces ne modifient ni l'état de repos ni l'état de mouvement du corps; on dit alors que les forces se font équilibre. —

Le mouvement le plus simple est le mouvement uniforme — c'est celui dans lequel les espaces parcourus sont proportionnels aux temps. — x étant l'espace parcouru pendant le temps t, a l'espace parcouru pendant l'unité de temps, on a $x = at$. a est exprimé en mètres; l'unité de temps est la seconde ou $\frac{1}{86400}$ du jour moyen. On suppose l'espace compté à partir de l'origine du temps. — La quantité $\underline{a}$ s'appelle vitesse du mouvement uniforme — J'ai supposé le mouvement rectiligne.

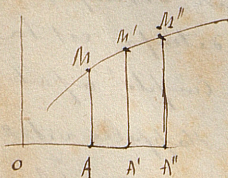
Si le mouvement se faisait sur une ligne courbe, le mouvement serait uniforme si le mobile décrivait des arcs égaux dans des temps égaux; (ce sont les arcs développés sur une ligne droite qui devraient être égaux).

Dans la pratique il est rare que l'on trouve des mouvements uniformes; alors on considère le mouvement uniforme qui ferait parcourir le même espace dans le même temps.

On appelle mouvement ~~uniforme~~ varié tout mouvement qui n'est pas ~~varié~~ uniforme; dans ce cas il y a nécessairement une force agissant sur le mobile d'une manière permanente ou par intermittence — on appelle vitesse du mobile à un moment quelconque, la vitesse du mouvement uniforme que prendrait le corps, si la force cessait tout à coup son action; nous supposons en cas le mouv. rectiligne; nous parlerons du mouv. curviligne quand nous aurons vu la composition des vitesses.

Quand la force cesse son action on est conduit à admettre que si le corps ne rencontrait pas d'obstacle, il se mouvrait indéfiniment d'un mouvement uniforme.

La loi d'un mouvement varié sera représentée par $e = f(t)$; cette relat. étant connue le mouvement est déterminé; le plus souvent on n'a pas cette relation, mais on connait un certain nombre de valeurs de e pour des valeurs correspondantes de temps — on pourra construire la courbe des espaces en prenant t pour abscisse et e pour ordonnée en joignant les points obtenus par des traits continus on aura la courbe des espaces; cette construction permettra de faire des interpolations; ainsi entre A et A', on aura l'espace correspondant à un temps compris entre OA et OA'; il ne faut accorder de confiance qu'aux valeurs de t comprises dans les limites de l'expérience



dans le mouvement varié la vitesse est égale à $f'(t)$. —

Voici la démonstration ordinaire. (Sturm)

on a $\lim \frac{\Delta e}{\Delta t} = v$.

or $\lim \frac{\Delta e}{\Delta t}$ est la limite du rapport de l'accroist. de la fonction à l'accroissement de la variable. donc $v = f'(t)$. — cette démonstration suppose que la vitesse est une fonction continue du temps. l'expérience prouve qu'il en est ainsi; il n'y a pas de force dans la nature qui produise un changement brusque de vitesse dans un temps infiniment petit.

Ceci établi la courbe des espaces peut donner la vitesse à un moment qlq.; suppo. qu'à l'époque t le mobile soit en m; menons la tangente en m; menons mB parallèle à l'axe des x. prenons mB égale à l'unité de temps à l'échelle convenue; par le point B élev. BT perpendicul. à mB. BT représentera la vitesse du mobile en m. car $BT = mB \cdot \operatorname{tg} BmT = f'(t)$.

BT représente la vitesse du mobile en mètres. —

Le cas le plus simple du mouvement varié est le mouvement uniformément varié; c'est celui où la vitesse varie proportionnellement au temps; dans ce cas la vitesse est représentée par $v = a + gt$

La quantité g est ce qu'on appelle l'accélération; c'est l'accroissement de vitesse dans l'unité de temps.

La chute des corps pesants est un exemple de ce mouvement et dans ce cas $g = 9^{m},8088$.

ici on connaît la loi de la vitesse, on peut remonter à la loi des espaces; v est la dérivée de e; on aura $e = b + at + \frac{gt^2}{2}$.

La réciproque est vraie; si l'espace est une fonction rationnelle et du 2e degré et de t, le mouv. sera unif. varié;

si on compte l'espace e à partir de $t = 0$ on a

$$e = at + \frac{gt^2}{2}.$$

65 v

Le mouvement uniformement varié peut se remplacer par un mouvement uniforme. on peut ecrire

$$e = t\left(a + \frac{gt}{2}\right) = t\left(a + \frac{v-a}{2}\right).$$

ou $$e = t\left(\frac{a+v}{2}\right)$$

si donc on considère deux epoques auxquelles la vitesse sont $\underline{a}$ et $\underline{v}$ l'espace parcouru pendant l'intervalle de ces deux epoques sera le meme que si le mobile avait eu un mouv. uniforme dont la vitesse aurait ete $\left(\frac{a+v}{2}\right)$

si on suppose nulle la constante a, on a alors

$v = gt$ $\quad e = \frac{gt^2}{2}$

la vitesse est proportionnelle au temps; les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps; si on elimine le temps entre les deux equat. on a $v = \sqrt{2gh}$. — Cette formule fait connaître v quand on connait la hauteur de chute — si l'on fait cette experience dans l'air pour verifier cette formule il faut que la hauteur de chute ne depasse pas 4 a 5 metres, car au dela la resistance de l'air devient trop considérable —

au bout du temps t l'espace parcouru est $e = \frac{gt^2}{2}$

au bout du temps $(t+1)$ on a $\quad e' = \frac{g}{2}(t+1)^2.$

d'où on calcule $\quad e' - e = \frac{g}{2}(2t+1)$;

donc les espaces parcourus pendant les unités de temps successives croissent comme les nombres impairs —

si deux corps tombent suivant la même verticale et partant du même point mais a un intervalle de temps très court, il est a remarquer que l'écart entre les deux corps va en croissant assez rapidement. — supposons que le point B parte $\frac{1}{100}$ de seconde après le point A; voyons ce que sera l'écart A'B' au bout d'une seconde comptée a partir de la chute du point B. au bout de 1'' on aura $\quad A'B' = \frac{g}{2}\{(1{,}01)^2 - 1\} = 0{,}0098$ c'est a peu près un decimetre; et en continuant les intervalles iraient en croissant. —

Liguier

Mécanique

On a construit des tables qui donnent les vitesses de chute pour des hauteurs correspondantes. voici quelques nombres

vitesse de chute	haut. de chute
0^m,1	0^m,0005
1^m	0,05
2^m	0,2
4^m	0,8
6^m,27	2^m
7^m,60	3^m
8^m,8	4^m

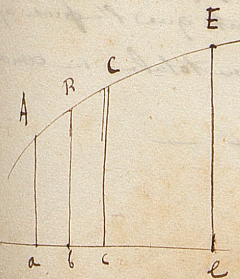
Précédemment nous avons conclu l'espace des vitesses; si on avait la courbe des vitesses, on pourrait remonter aux espaces parcourus. pour t=0 on a v=OB; alle pour t=OP on a v=PM, on a de même construit les points intermédiaires. on sait que l'aire MBOP a pour dérivée l'ordonnée MP. mais l'espace a aussi pour dérivée MP, puisque MP représente la vitesse. donc l'aire et l'espace parcouru ont même dérivée; ils ne peuvent donc différer que par une constante: ici la constante est nulle.



On voit que quand la courbe des vitesses sera simple, on aura aisément la loi des espaces parcourus.

Formule qui donne l'aire d'une courbe. Considérons une partie de courbe dans laquelle on pourra supposer que l'ordonnée soit constamment croissante ou décroiss. supp. la croissante

on veut mesurer l'aire AEae. on partage l'intervalle ae en un certain nombre de parties égales. soit h la longueur de l'une de ces parties. on considère les parties ABab comme des trapèzes dont l'aire approximat. pour la mesure de l'aire



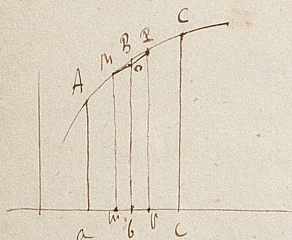
66v

$$h\left\{\frac{y_1}{2}+y_2+y_3+ \cdots +\frac{y_n}{2}\right\}.$$

Thomas Simpson a donné une formule plus approchée que celle là. Supposons que le nombre de division soit pair et égal entre elles, de sorte que les ordonnées y_1 y_2 — soit en nombre impair.

Considérons trois ordonnées Aa, Bb, Cc. — soit h la largeur $h = ab = bc = -$ si on fait la somme des deux trapèzes on aura pour l'aire

$$\frac{h}{2}\left\{y_1+2y_2+y_3\right\}.$$



Le but de la formule de Thomas Simpson est d'avoir une formule plus approchée, sans augmenter le nombre de division. Supposons qu'on divise ac en trois parties égales, soit m et p les points de division; on aura $am = mp = pc = \frac{2}{3}h$. élevons mM, pP perpend. à l'axe des x. menons les cordes AM, MP, PC. ; soit o le point où MP rencontre Bb. soit Bo = δ on aura pour l'aire des trapèzes Am, Mp, Pc

$$\frac{h}{3}\left(y_1+Mm\right)+\frac{h}{3}\left(Mm+Pp\right)+\frac{h}{3}\left(Pp+y_3\right).$$

ou

$$\frac{h}{3}\left\{y_1+2\left(Mm+Pp\right)+y_3\right\}$$

or

$$mM+Pp = 2oB = 2\left(y_2-\delta\right),$$

on aura donc pour l'aire

$$\frac{h}{3}\left\{y_1+4\left(y_2-\delta\right)+y_3\right\}.$$

dans la formule de Simpson on néglige δ, et on prend pour l'aire $\frac{h}{3}\left\{y_1+4y_2+y_3\right\}$

La suppression de δ augmente l'expression précédente et comme on avait l'aire par défaut, on conclut que l'expression approche davantage de l'aire réelle — pour l'aire totale on aura

$$\frac{h}{3}\left\{y_1+4y_2+y_3\right\}+\frac{h}{3}\left(y_3+4y_4+y_5\right)+ \cdots$$

ou $\frac{h}{3}\left\{y_1+y_{2n+1} + 4(y_2+y_4+ \ldots +y_{2n}) + 2(y_3+y_5+\ldots y_{2n-1})\right\}$

en supprimant δ on a augmenté la somme des trois trapèzes de $\frac{4}{3}h\delta$. or si on considère le triangle MBO ~~et~~ PBO, en le considérant comme ayant pour base commune BO, on aura

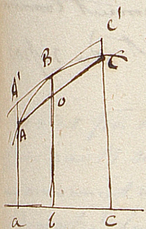
$$MBO + PBO = \frac{\delta}{2}\times\frac{2}{3}h = \frac{\delta h}{3}$$

donc la somme des trois trapèzes a été augmentée de 4 fois le triangle MBP. pour avoir l'aire exacte il aurait fallu ajouter segt AM + segt MP + segt PB.

au lieu d'ajouter les trois segments, on a ajouté 4 fois un triangle qui est un peu plus petit.

il peut arriver que l'approximation soit par excès.

La formule de Simpson revient à substituer à la courbe une suite d'arcs de parabole correspondant à trois points consécutifs. prenons trois points consécutifs A, B, C: par les trois points on peut faire passer un arc de parabole dont le diamètre soit parallèle aux ordonnées. — l'aire comprise entre l'arc de parabole et les ordonnées extrêmes est égale ~~à~~



$$\text{segt } ABC + ACca.$$

~~or~~ segt $ABC = \frac{2}{3}AA'CC' = \frac{4}{3}Bo\times h$

$$ACca = h(y_1+y_3).$$

donc l'aire totale $= h(y_1+y_3) + \frac{4}{3}Bo\times h.$

or $Bo = y_2 - \frac{y_1+y_3}{2}$ donc

aire des deux trapèzes $= \frac{h}{3}\left(y_1+4y_2+y_3\right)$

c'est bien la même expression que précédemment —

inertie) — L'inertie est cette propriété en vertu de laquelle un point ne peut modifier ni son état de repos ni son état de mouvement. —

L'effet d'une force sur un point materiel est independante du ~~point~~ mouvement anterieurement acquis. Ceci resulte du principe de l'independance des mouvements simultanés.

Si l'on considere un systeme de points decrivant des droites egales et parallèles avec une vitesse constante ou variable, mais qui soit la même pour tous à chaque instant de sorte que ces points ne paraissent pas se deplacer les uns par rapport aux autres, si un des points M est sollicité par une force F, qui lui ferait parcourir un espace l dans le temps t, n'agit pas sur les autres, le mouvement relatif du point M à l'égard des autres points sera le même que le mouvement absolu qu'aurait ce point M, si le mouvement commun n'existait pas, et que le point M partant du repos fut encore sollicité par la même force —



Ce principe ne peut pas etre verifié par l'experience il est generalisé par l'induction, et il est vrai parceque les consequences que l'on en deduit sont toujours verifiées par l'experience. —

Lignier

Cours de Mécanique

Conséquences du principe de l'indépendance des mouvements simultanés. —

1° Si un point matériel animé d'une vitesse acquise q(uelcon)q(ue) vient à être sollicité par une force dirigée dans le sens même du mouvement, cette force lui communiquera après un temps quelconque un accroissement de vitesse precisement égal à la vitesse qu'elle lui imprimerait dans le même temps, s'il partait de l'état de repos.

Ainsi à une époque t un mobile M est au point M avec une vitesse v. une force agit sur lui pendant le temps θ; cette force lui ferait parcourir pendant ce temps, un espace e s'il partait de l'état de repos; e designant par e' la dérivée de e, la vitesse que la force communiquerait au mobile partant du repos après le temps θ sera e'; eh bien au bout du temps $t+\theta$, la vitesse du mobile sera $v+e'$. — Car soit un mobile μ animé de la vitesse v. — au bout du temps θ le mobile μ aura parcouru $v\theta$; donc le mobile M aura parcouru $v\theta+e$; sa vitesse à ce moment sera la dérivée de cette expression, c. a. d. $v+e'$. — ×

× il n'est pas nécessaire de supposer que M se meut d'abord d'un mouvement uniforme. Ceci sera démontré, lorsque nous aurons démontré que l'effet d'une 2e force P_1 s'ajoute à l'effet de la force P. —

Si la force agissait en sens contraire du mouvement du mobile on ferait le même raisonnement, et on verrait que la vitesse du mobile au bout du temps $t+\theta$ serait $v-e'$! —

Supposons que le mobile μ animé de la vitesse v soit en outre sollicité par une P pendant un temps θ, et que le mobile M soit sollicité par la force P et par une 2e force P_1. ~~Supposons~~ que la force P_1 agissant sur M partant du repos lui fasse parcourir un espace e_1 pendant θ. au bout du temps $t+\theta$, μ aura parcouru $v\theta+e$; et M aura parcouru $v\theta+e+e_1$; la vitesse du mobile μ sera $v+e'$, et celle du mobile M sera $v\theta+e'+e_1'$, e_1' étant de la dérivée de e_1; ainsi donc encore

68 r

encore dans le cas ~~la vitesse du mobile~~ est l'action de la force P, est indépendante de la vitesse précédemment acquise. ~~Car si~~ dans le 1er cas nous avions supposé la vitesse ~~acquise~~ constante et égale à ~~la dernière~~ dans la dernière partie, la vitesse acquise que possède le mobile n'est plus constante, puisque nous supp. le mobile sollicité par une force constante. Ainsi le théorème est démontré d'une manière générale.—

On conclut de là qu'une force constante agissant sur un mobile lui imprime un mouvement uniformément varié.— (Voy. Sturm)

× On appelle poids d'un corps la pression exercée par le corps sur l'obstacle qui l'empêche de tomber.— on peut comparer les forces avec les poids.—

× on appelle forces égales des forces qui agissant sur un même point dans les mêmes circonstances produisent le même effet.—

Mais d'abord comparons les poids entre eux. (Sonnet).— on peut ensuite comparer les forces aux poids, au moyen du dynamomètre.— (Sonnet.)—; ainsi pour mesurer l'effort que fait un cheval traînant une voiture, on coupera les traits et on y interposera le dynamomètre.—

Un dynamomètre plus exact est celui de Regnier perfectionné par Poncelet.—

~~Dans le dynamomètre~~ Les forces pouvant être comparées aux poids, le kilogramme sera pris pour unité de force.

Deux forces constantes agissant pendant le même temps sur un même ~~corps~~ point matériel sont proportionnelles aux accroissements de vitesse qu'elles communiquent à ce point.— on a $F : F' :: u : u'$. (Sturm)—

Supposons que la force F' soit le poids p d'un point matériel, soit g l'accélération due à la pesanteur; on aura

$$F' : p :: u : g$$

d'où $$F' = u \times \frac{p}{g}.$$

pour une autre latitude on aurait

$$F' = u \times \frac{p'}{g'}.$$

par suite $$\frac{p}{g} = \frac{p'}{g'} = \ldots = \frac{F'}{u}.$$

c'est ce rapport constant qu'on appelle la masse du point matériel. — si l'on désigne cette masse par m on aura $p = mg$. et $F' = mu$. ×

On appelle masse d'un corps de dimensions finies, la somme des masses des points matériels qui composent le corps. si M est la masse du corps on aura

$$M = \frac{p}{g} + \frac{p'}{g} + \frac{p''}{g} + \ldots$$

p, p', p'' étant les poids des différentes molécules. — admettons maintenant que le poids du corps est égal à la somme des poids des différentes molécules, en posant $P = p + p' + \ldots$ on aura $M = \frac{P}{g}$ ainsi la masse d'un corps est définie. ici nous admettons la composition des forces que nous n'avons pas encore vue; mais l'expérience démontre ce que nous venons d'admettre. Car si dans l'un des plateaux d'une balance il y a un corps faisant équilibre à l'autre plateau, si on réduit le corps en poussière, l'équilibre existera toujours; donc le poids d'un corps est égal à la somme des poids des molécules qui composent le corps. —

Nous avons trouvé $F = mu$.

une autre force F' qui appliquée a un point de matière lui communiq. une accélér. u' donnerait

$$F' = m'u'$$

on a donc $F : F' :: mu : m'u'$

Nous avons vu aussi que $M = \frac{P}{g}$

La pesanteur sollicitant indistinctement toutes les molécules d'un corps, on est conduit a admettre que le poids doit être en rapport avec la quantité de matière qui se trouve dans le corps; mais le poids ne peut suffire à donner une idée de la quantité de matière contenue dans le corps; car la quantité de matière contenue dans le corps est toujours la même, et le poids varie aux différentes latitudes, alors on prend le rapport du poids a l'accélération. Dans un même lieu pour comparer entre elles les masses de plusieurs corps, il suffirait de comparer entre eux les poids de ces corps.

On prend pour unité de force le kilog. si on prend l'unité de longueur égale au mètre, et la seconde pour unité de temps, l'unité de masse ne sera plus arbitraire; cela se voit au moyen de l'équation $P = Mg$. si on fait $M = 1$ il reste $P = g$; donc le poids qui correspond a l'unité de masse est représenté par g. c'est $9^k, 8088$.

Lignier

Cours de mécanique

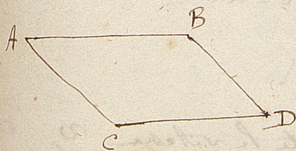
Composition et décomposition des vitesses

La nature montre qu'un point matériel peut être animé en même temps de plusieurs vitesses — bille roulant sur un bateau qui se meut sur l'eau; il est clair que la bille possède deux vitesses simultanées — en ayant égard aux mouv. de rotation et de translation elle aurait de rotation les vitesses. Or il résulte du principe des mouvements relatifs que les vitesses ne s'influencent pas: ainsi la bille se meut sur le bateau absolument comme si le bateau était en repos. —

Quand un mobile est animé de plusieurs vitesses, il ne prend qu'un seul mouvement qui est le mouvement résultant.

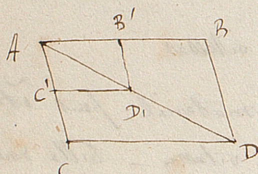
~~Soit un point A;~~ ~~AB la direction suivie par le bateau;~~ ~~AC la direction de l'impulsion donnée à la bille~~..; ~~suppos. la vitesse du bateau uniforme, ainsi que la vitesse de la bille.~~ ~~Soit AB le chemin~~

Soit A un point matériel, suppos. ce point animé de deux vitesses l'une dirigée suivant AB, l'autre suivant AC — supposons que ces deux vitesses soient uniformes; soit AB l'espace que A aurait parcouru (s'il eut été animé seul de la vitesse suivant AB) au bout du temps t; soit AC l'espace que A aurait parcouru pendant le temps t, s'il avait été animé de la seule vitesse dirigée suivant AC; pour avoir la position du mobile au bout du temps t il faut par le point B mener BD ~~parallèle~~ égale et parallèle à AC(x) et le point D sera la position du mobile au bout du temps t.



(x) Ceci résulte du principe de l'indépendance des mouvements simultanés. —

70 v



Le mobile a suivi la diagonale, soit v la vitesse suivant AB, et u la vitesse suivant AC.

on aura $\quad DC = vt$.

$AC = ut$.

d'où $\quad \frac{DC}{AC} = \frac{v}{u}$.

soit D' la posit. du mobile à l'époque t'; on a

$AB' = vt' \qquad AC' = ut'$

d'où $\quad \frac{C'D'}{AC'} = \frac{v}{u}$.

les triangles AC'D'. ACD ayant un angle égal compris deux côt. proportionnel sont semblables, donc AD' se confond avec AD; donc le mobile se meut sur la diagonale.

la diagonale est décrite d'un mouvement uniforme il résulte des mêmes triangles semblables

$$\frac{AD}{AD'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{vt}{vt'} = \frac{t}{t'}$$

dans l'espace parcouru sont prop. au temps, ce qui est le caractère du mouvement uniforme.

représentons par w la vitesse du mouvement résultant, donc on a

$AD = wt \quad AB = vt \quad AC = ut$.

$$\frac{w}{AD} = \frac{v}{AB} = \frac{u}{AC}$$

par conséquent si AB représente la vitesse v, et AC la vitesse u, la vitesse w du mouvement résultant sera représentée par la diagonale AD.

Si donc un mobile est animé de deux mouv. rectilig. simult. et uniform, le mouv. resultant sera rectiligne et uniforme. la direction et la grandeur de la vitesse du mouvement resultant est representée par la diagonale du parallelogramme construit sur les vitesses.

Cette démonstrat. est indépendante du temps, elle serait vraie pour un temps infiniment petit. elle est donc applicable au cas où la vitesse est variable, car on peut toujours supposer que la vitesse est constante pendant un temps infiniment petit.

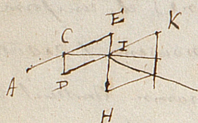
Cette composit. de vitesse explique le mouvement curviligne. un point A a une vitesse dirigée suivant AB. supp. qu'il soit soumis à l'act. d'une force, cette force pour agir a besoin d'un certain temps. soit θ ce temps, pendant ce temps le mobile parcourt AC; et lorsque le mobile sera en C la force lui aura communiqué une vitesse que je represente par CD, alors au point C, le mobile pourra être considéré comme animé de deux vitesses, l'une dirigée suivant CB, l'autre suivant CD, la vitesse résultante sera dirigée suivant CH. et au bout du 2e instant le mobile sera en H et il continuerait à se mouvoir suivant CH si la force cessait son action, mais la force sollicitant toujours le mobile, il prendra la direction HK etc —— en supposant la force agissant brusquement d'instant en instant on aura une ligne polygonale pour trajectoire du mobile; et si au lieu d'agir brusquement la ~~vitesse~~ force agit d'une manière continue la ligne polygonale aura pour limite une courbe. chaque coté de la ligne polygonale représente la direction actuelle de la vitesse à la limite cette ligne devient tangente à la courbe; donc la vitesse



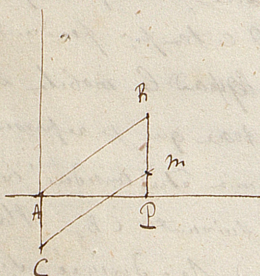
71v

d'un mobile qui se meut sur une courbe est dirigée suivant la tangente à la trajectoire. —

Cas d'un projectile soumis à l'action de la pesanteur supposé un mobile lancé avec une vitesse initiale dans la direction AC. au bout du premier instant le mobile est au point C il a deux vitesses CD et CE qui se composent en une CI. au point I il a deux vitesses IK = CE et IH = 2CD, car la vitesse augmente de quantités égales au bout de temps égaux — et on aura ainsi la trajectoire. —



Il est facile de voir que le mobile décrira une parabole —. soit AB la direct. de la vitesse. supp. que la pesanteur n'existe pas, au bout temps t le mobile serait en B. — si la pesanteur existait seule le mobile décrirait $AC = \frac{1}{2}gt^2$. donc au bout du temps t, le mobile ~~aura~~ sera en M.



soient $AP = x$ $mP = y$.

$$x = at\cos\alpha.$$

$$y = at\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

en éliminant t on aura le lieu décrit par le mobile, celui-ci est

$$y = x\,tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{a^2\cos^2\alpha}. -$$

si je pose $a^2 = 2gh$ l'éq. devient

$$y = x\,tg\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha} -$$

éq. d'une parabole — d'axe vertical —

Lignier

Cours de Mécanique —

Composition des accélérations. — Examinons d'abord le cas où les deux mouvements seraient rectilignes et uniformément variés. — En faisant identiquement le même raisonnement que dans le cas où les deux vitesses étaient uniformes, on arrive aux mêmes conséquences. — Le mobile se mouvra sur la diagonale et son mouvement sera uniformément accéléré ; l'accélération du mouvement résultant est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux accélérat. composantes. —

Considérons l'accélération dans le cas général. — Dans un mouvement rectiligne varié on appelle accélération à l'époque t, l'accroissement de vitesse que la force communiquerait au mobile dans l'unité de temps, si pendant cette unité de temps elle gardait l'intensité qu'elle avait au commencement. —

L'accélération est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps. — En effet considérons deux positions m, m' d'un mobile assez rapprochées pour que la force de m en m' soit constamment croissante. Soit Δv l'accroiss. de vitesse que le mobile éprouve en passant de m à m'. — Soit φ l'accélérat. du mobile en m, soit φ' l'accélérat. en m'. On aura

m m'

$$\varphi \Delta t < \Delta v < \varphi' \Delta t$$

d'où

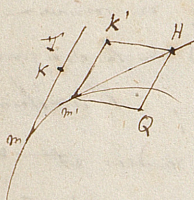
$$\varphi = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

C'est la dérivée de la vitesse par rapport au temps. —

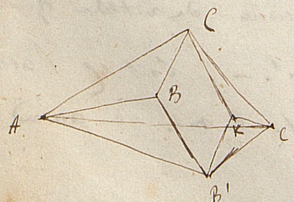
72v

passons à l'accélération dans le mouvement curviligne

Supposons un mobile se mouvant sur une trajectoire AB au point m le mobile est animé d'une vitesse v dirigé suivant la tangente mT à la trajectoire ; au bout d'un temps très petit le mobile sera venu en m' et la vitesse v' aura changé en grandeur et en direction. la vitesse v' peut être décomposée en deux vitesses dont l'une sera égale à v, et l'autre sera donnée par le parallélogramme de vitesses. si mK représente v, prenons m'K' égale et parallèle à mK ; soit m'H = v' m'Q sera l'autre composante de v'. ; soit m'Q = u c'est la vitesse u qui combinée avec v donne la vitesse v'. — Le mouvement curviligne est dû à la vitesse u, qui évidemment est produite par une force on appelle accélération le rapport de u au temps infiniment petit. — c'est $\lim \frac{u}{\theta}$.



Les accélérations se composent comme les vitesses. — Soit un point A animé de 2 vitesses simultanées AB, BC. — au bout d'un temps t la vitesse résultante sera AC. au bout d'un temps infiniment petit θ, les vitesses AB, BC ont été modifiées et sont devenues AB', B'C'. alors AC' sera la vitesse du nouveau mouv. résultant après le temps θ. — L'accélération du mouvement résultant sera $\frac{CC'}{\theta}$

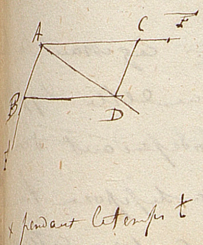


(on suppose que par un point de l'espace A on mène des ~~parallel~~ lignes égales et parallèles aux vitesses d'un mobile se mouvant sur une ligne courbe).

Tirons BB'. $\frac{BB'}{\theta}$ est l'accélération élémentaire du 1er mouvement composant. Si on mène B'K égale et parallèle à BC $\frac{KC'}{\theta}$ sera l'accélérat. élémentaire du 2e mouvement composant. Si on joint CK, la figure BCKB' sera un parallélogramme, et CK = BB' par conséquent CC' est la diagonale du parallélogr. construit sur BB' et sur KC'. Donc etc —

Composition et décomposition des forces. —

Soient deux forces F et F' constantes agissant sur un point A partant du repos. Si la force F agissait seule, le point A parcourrait AC d'un mouv. unif. accéléré ×; si F' agissait seule, le point A parcourrait AB d'un mouv. uniformément accéléré pendant le temps t; en vertu de l'indépendance des mouv. simultanés, le point A sous l'action des deux forces parcourra la diagonale du parallél. construit sur AC et AB, d'un mouvement uniformément accéléré. Il existe donc une certaine force R constante capable de produire ce mouvement. Cette force R sera la résultante puisqu'à elle seule elle produit le même effet sur le point A que les forces F et F'. La résultante est donc dirigée suivant la diagonale; elle est de plus représentée en grandeur par la même



× pendant le temps t

diagonale AD, ~~en effet les forces constantes sont proportionnelles aux accélérations~~, si on represente F par AC, et F' par AB. —

En effet les forces constantes sont proportionnelles aux accélérations qu'elles produisent sur un même point. Soit r et f les accelerations de R et F, on aura

$$\frac{R}{F} = \frac{r}{f}.$$

Mais $AB = \frac{1}{2} f t^2.$

$AD = \frac{1}{2} r t^2.$ Donc

$$\frac{R}{F} = \frac{AD}{AC}$$

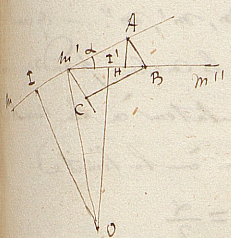
Si donc F est representé par AC, R sera representée par AD. —

ici nous avons supposé les forces agissant sur le mobile partant du repos, on peut faire cette hypothèse puisque l'effet d'une force sur un point est independant du mouvement anterieurement acquis — si on suppose le mobile animé d'une vitesse, il faudra composer cette vitesse avec la vitesse due a l'action des forces. —

Lignier

Cours de Mécanique —

Nous avons vu que si un mobile se meut sur une courbe $mm'm''$ — suivant mm' avec une vitesse v, suivant $m'm''$ avec une vitesse v_1, la vitesse v_1 repre. par $m'B$ pouvait se décomposer en deux autres, l'une égale à v et l'autre égale à $m'c$ que nous avons appelé u. — Cette vitesse u est l'effet de la force qui sollicite le mobile —. c'est la variation de la vitesse v. $Lim. \frac{u}{\theta}$ est l'accélérat. élémentaire du mobile —



L'accélération AB peut à son tour se décomposer en deux l'une perpendiculaire à $m'B$, et l'autre dans la direction de la vitesse $m'B$. — abaissons du point A, AH perpendiculaire sur $m'B$, — AH et BH seront les deux composantes dont nous venons de parler. la normale AH à la courbe est dans le plan osculateur de la courbe, puisqu'elle est dans le plan de deux éléments consécutifs. ; à la limite AH devient la direction du rayon de courbure — ; à la limite la direction BH sera la direction de la tangente. — — Cherchons l'expression de ces deux composantes.

Soit $Am' = v$, $m'B = v_1$ — on a A

$$AH = v\sin\alpha \quad , \quad BH = v_1 - v\cos\alpha$$

α est l'angle de $m'B$ avec l'élément suivant $m'B$. —

divisons ces deux quantités par θ —

$$Lim. \frac{v\sin\alpha}{\theta} = \text{composante centripète}$$

$$Lim. \frac{v_1 - v\cos\alpha}{\theta} = \text{composante tangentielle}$$

} de l'accélérat. $Lim. \frac{u}{\theta}$

on peut écrire $\frac{v\sin\alpha}{\theta} = \frac{v\alpha}{\theta} \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

et à la limite on voit que cette composante est $Lim. \frac{v\alpha}{\theta}$

74 r

on peut donc écrire

$$\text{lim.}\ \frac{v \sin \alpha}{\theta} = \text{lim.}\ \frac{v\alpha}{\theta}.\quad \text{ou bien}$$

$$\text{lim.}\ v\frac{\alpha}{\theta} = v\ \text{lim.}\ \frac{\frac{\alpha}{mm'}}{\frac{\theta}{mm'}}$$

en introduisant l'element mm'. — Cherchons une expression de cette quantité en quantités finies —

Soit I le milieu de mm'; i' le milieu de l'element ... les perpendiculaires élevées sur les lignes en leurs milieux se rencontreront en un point O, le cercle décrit du point O comme centre avec Om pour rayon passe par les 3 points m, m', m''. — quand ces trois points se rapprochent indéfiniment, le cercle prendra une position limite; on dit que le cercle est osculateur à la courbe. Soit r le rayon de ce cercle, ρ son rayon à la limite

angle $IOi' = \frac{\alpha}{2}$ et par suite $IOm' = \frac{\alpha}{2}$

$Im' = m'O \sin m'OI = r \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{mm'}{2}$. d'où $r = \frac{\frac{mm'}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

passant à la limite on a $\text{lim.}\ r$ ou $\rho = \text{lim.}\ \frac{mm'}{\alpha}$. D'un autre côté $\text{lim.}\ \frac{mm'}{\theta} = v$. donc $\text{lim.}\ \frac{v\theta}{\alpha} = \frac{v^2}{\rho}$.

reprenons l'autre composante. on peut écrire

$$\frac{V_1 - V\cos\alpha}{\theta} = \frac{V_1 - V}{\theta} + \frac{2V\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{\theta}$$

$$\frac{V_1 - V\cos\alpha}{\theta} = \frac{V_1 - V}{\theta} + \frac{2V\sin\frac{1}{2}\alpha}{\theta}\cdot\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

or le facteur $\frac{2V\sin\frac{1}{2}\alpha}{\theta}$ a même limite ~~la même quantité~~ que $\frac{v\alpha}{\theta}$, ~~et~~ qui vient d'être trouvée; l'autre facteur $\sin\frac{1}{2}\alpha$ a pour limite zéro. — donc à la limite $\frac{2V\sin\frac{1}{2}\alpha}{\theta}\sin\frac{1}{2}\alpha$ est égal à zéro. — maintenant $\text{lim.}\ \frac{V_1 - V}{\theta}$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, qu'on peut désigner par V'. — Ainsi l'accélération peut être regardée comme la résultante de deux composantes, l'une centripète égale à $\frac{V^2}{\rho}$, l'autre tangentielle égale à V'. —

On peut faire la même décomposition sur la force qui sollicite un point libre ; ou bien la force motrice elle pourra se décomposer en deux forces, l'une dirigée suivant le rayon de courbure, l'autre dirigée suivant la tangente. — L'accélération dont nous venons de trouver les composantes, $\lim \frac{u}{\theta}$, est l'effet de la force elle est aussi égale à $\frac{P}{m}$; il en résulte que la force motrice pourra être décomposée en deux composantes, l'une centripète $\frac{mv^2}{\rho}$, l'autre tangentielle mv'. —

La force centripète est toujours dirigée dans la concavité de la courbe. — La force tangentielle n'est pas toujours dirigée sur la tangente dans le sens du mouvement. — elle agit dans le sens du mouv. quand la vitesse est croissante ou $mv' > 0$; en sens contraire si la vitesse décroît ou $mv' < 0$.

Si on désigne par T' la force tangentielle, F' la force centripète, les éq. du mouv. d'un point seront

$$T' = mv' \quad F' = \frac{mv^2}{\rho} \ldots$$

Parler de la force centrifuge — Son influence sur la variat. de la pesanteur à la surface de la terre. —

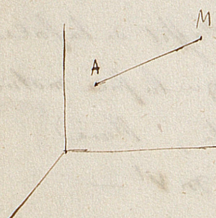
Cette force n'est qu'une réaction ; dans le cas d'un point libre il n'y a pas de force centrifuge. —

Considération qui se trouvent dans Sturm —

3

En partant toujours des mêmes considérations on peut trouver les equat. du mouvement curviligne sous leur forme la plus générale.

Considérons d'abord un mouvement dans l'espace rectiligne et uniforme — soit v la vitesse de ce mouvement — on aura $AM = vt$. soient $a. b. c$ les coord. du point A, $x\ y\ z$ les coordonnées du point M —. soit α l'angle que la droite AM dans le sens du chemin parcouru fait avec la partie positive de l'axe des x — on aura $x - a = vt \cos\alpha$ — ou



$$x = a + vt.\cos\alpha$$

de même
$$y = b + vt\cos\beta$$
$$z = c + vt\cos\gamma. —$$

Ces trois equat. determinent le mouvement du point. — chacune d'elles est aussi l'equat. d'un mouvement rectiligne uniforme — donc les project. du mobile sur les 3 axes se meuvent d'un mouvement uniforme. — les vitesses de ces 3 mouvements sont les composantes $v\cos\alpha$, $v\cos\beta$, $v\cos\gamma$ de la vitesse v du mobile. —

Réciproquement si les 3 vitesses des project. sont uniformes, le mouvement du mobile dans l'espace est rectiligne et uniforme. — en designant par $p\ q\ r$ les vitesses des 3 projections on aura

$$x - a = pt$$
$$y - b = qt$$
$$z - c = rt.$$

quelle que soit la route suivie par le mobile pour aller de A en M on a $AM = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = t\sqrt{p^2+q^2+r^2}$.
Donc d'abord la distance AM croît proportionnellement au temps
la direction AM est constante — car on $\cos\alpha = \frac{x-a}{AM} = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$
de même $\cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ $\cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$. —

Lignier

Cours de Mécanique —

On passe de là au cas d'un mouvement quelconque. — Suppos. que le mouvement du mobile soit determiné par les trois equat.

$$x = f(t)$$
$$y = \varphi(t)$$
$$z = \psi(t). —$$

à l'époque t quand le mobile est en M, suppos. que la force cesse tout à coup son action — Le mobile prendra un mouvement rectiligne et uniforme. — les projections prendront aussi un mouvement ~~rectiligne et~~ uniforme. Ce mouvement est il le mouvement uniforme que prendrait la projection, si on supprimait la force fictive qui donnerait à cette projection son mouvement précédent.? oui — en effet soit v la vitesse qui anime le mobile quand il est en M. soit α l'angle que la direct. de cette vitesse fait avec la partie positive de l'axe des x — le mobile continuant à se mouvoir va de M en M'. (au bout d'un temps θ infin. petit) sa vitesse varie d'une manière continue; elle devient v', et v' ne diffère de v que par un infiniment petit; de même α devient α', et α' diffère infiniment peu de α. — quand le mobile est en M et en M' sa project. sur l'axe des x. a les vitesses $v\cos\alpha$, et $v'\cos\alpha'$, et ces deux vitesses d'après la remarque précédente diff. infiniment peu. la vitesse de la projection est donc une fonction continue du temps. — or si on se reporte à la demonstration faite au commencement du cours pour montrer que la vitesse est la derivée de l'espace parcouru par rapport au temps, on voit que cette demonstration

76v

ne suppose qu'une chose, c'est que la vitesse est une fonction continue du temps. — on ne tient nullement compte de la force. dans d'autre cas que nous occupe, pourvu que la vitesse est une fonction continue du temps, la vitesse de la project. sur l'axe des x sera $f'(t)$. — de meme sur les autres axes $\varphi'(t)$ $\psi'(t)$. — V étant la vitesse du mobile dans l'espace on aura

$$V = \sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}.$$

cette vitesse est dirigée suivant la direct. du dernier element, suivant la tangente —

on sait que $v = \lim. \frac{\Delta s}{\theta}$: c'est la derivée de l'arc par rapport au temps — soit s' cette dérivée. on aura $s' = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$.

x' y' z' designant les derivées de x, y, z par rapp. au temps

On peut etablir les equat. generales du mouvement curviligne —

Suppos. le mobile arrivé en un point M de sa trajectoire avec une vitesse acquise v, et sollicité par une force P.

Soient u, v, w les comp. de la vitesse parallèles aux axes X Y Z — de la force id —

Supp. pour un moment que l'on supprime X et u; alors le mobile ne pourra se mouvoir que dans un plan parallele à YZ — si on retablit X et u l'effet de cette force et de cette vitesse sera de deplacer le point M du plan parallele a YZ dans un plan infiniment voisin; et d'après le principe du mouvement relatif, ce mouvement parallele à l'axe

de x est independant du mouvement effectué dans le plan parallele à YZ. le mouvement a lieu comme si X existait seule — donc $X = mx''$ —

de meme $Y = my''$

$Z = mz''$ —

x'', y'', z'' sont les derivées secondes des espaces parcourus.

Ce chapitre se terminerait par les conditions d'equilibre d'un point materiel —

si le point est libre il faut que la resultante soit nulle; $R = 0$, alors sa project. sur un axe qlq sera nulle, soit a l'angle de R avec Ox on aura $R\cos a = 0$. mais $R\cos a = \Sigma P\cos\alpha$. donc $\Sigma P\cos\alpha = 0$ de meme $\Sigma P\cos\beta = 0$ $\Sigma P\cos\gamma = 0$

Ces trois equat. sont necessaires — sont elles suffisantes? oui: et meme les axes peuvent etre qlq. — car si on a ces trois eq. $\Sigma P\cos\alpha = 0$ $\Sigma P\cos\beta = 0$ $\Sigma P\cos\gamma = 0$ il en resulte d'abord que $R\cos a = 0$. ce qui donne $R = 0$ ou $a = 90°$ — on verrait de meme que la resultante devrait etre perpend. aux deux autres axes ce qui est impossible; donc on doit avoir $R = 0$ — donc l'equilibre existe. —

Si le point n'est pas libre il faudra introduire la resistance de la courbe ou de la surface. —

etc etc —

B

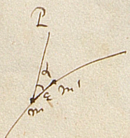
Travail des forces —

En mécanique travailler c'est vaincre une résistance qui se renouvelle sans cesse. Indépendamment de l'effort exercé pour vaincre une résistance, il faut tenir compte du chemin parcouru par le point d'application de la force —; si on veut puiser de l'eau dans un puits, le travail dépend de la quantité d'eau tirée et de la profondeur du puits; si on veut enlever une parcelle d'un corps, il faut exercer un certain effort et faire marcher l'outil dans le sens de la molécule — ce qui se paie dans l'industrie c'est le travail estimé en raison composée de ces deux éléments, de la résistance vaincue et du chemin parcouru par le point d'application de la force. —

L'unité de travail est une résistance vaincue le long de 1 mètre — ou le travail nécessaire pour élever 1 Kilog. à 1 mètre de hauteur. ; cette unité s'appelle Kilogrammètre : on la désigne par K.M. —

Il ne faut pas se borner au cas où l'effort est dirigé dans le sens du chemin parcouru —, le contraire peut arriver —

On appelle travail élémentaire d'une force, le produit de la force par la projection sur sa direction de l'élément de chemin parcouru par le point d'application. Le travail élémentaire d'une force sera représenté par $P \varepsilon \cos\alpha$; ε est le chemin parcouru. —



Lignier

Cours de Mécanique

Le travail total d'une force dans l'intervalle d'une position à une autre est la somme des travaux élémentaires effectués pendant cet intervalle. C'est $\Sigma P \varepsilon \cos\alpha$. Sa détermination est du ressort du calcul intégral.

Le travail élémentaire peut être défini d'une autre manière ; car on a $P \varepsilon \cos\alpha = P \cos\alpha \times \varepsilon$, alors le travail élémentaire sera le produit de la composante tangentielle par le chemin parcouru.

Le travail est nul dans trois cas — si $R = 0$. si $\varepsilon = 0$, et si $\alpha = 90°$ —

Il résulte de là que dans le transport horizontal d'un fardeau le travail est nul s'il n'y a pas de frottement. Un homme qui transporterait un fardeau sur son dos effectuerait un travail nul ; et cependant l'effet produit serait utile. Ce serait un cas à considérer à part.

Quand $\alpha < 90$, la projection de l'élément mm' sur la direction de la force tombe sur la direction même de la force. On dit alors que le travail est <u>moteur</u>. Son expression est positive. Si $\alpha > 90$, la project. de mm' tombe sur le prolongement de la direction de la force. Le travail est <u>résistant</u> ; son expression est négative.

Le travail total dépend généralement du calcul intégral ; il y a certains cas où le calcul du travail total peut se faire d'une manière élémentaire.

78v

Si la force est constante et agit touj. tangentiellement à la trajectoire, le travail total sera $\mathcal{T} = P e$, e étant l'espace parcouru ; si un poids P descend verticalement d'une hauteur h, le travail produit sera Ph.

Si la force P est constante et parallèle à elle même on peut évaluer le travail total — ; soit par ex. un mobile pesant descendant le long d'une courbe AB quelconque — soit $A'B' = h$. le travail produit en allant de A en B sera Ph.



Quand le mobile descend selon la verticale on a vu qu'on a $v^2 - v_0^2 = 2gh$, de suite qu'on a

$$m(v^2 - v_0^2) = 2mgh.$$

mais $mg = P$. donc

$$m(v^2 - v_0^2) = 2Ph.$$

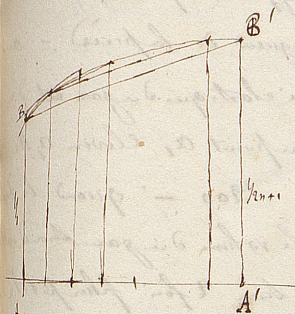
donc le double du travail produit est égal à $m(v^2 - v_0^2)$. le produit $m(v^2 - v_0^2)$ est l'accroissement de force vive — ; donc le double du travail produit est égal à l'accroissement de force vive —

Si la force est ~~constante~~ variable d'intensité et de direction, le travail total de la force sera

$$\lim. \sum T \varepsilon \ldots$$

Cette somme pourra être évaluée en calculant l'aire d'une courbe —.

Méthode de M. Poncelet. — ; elle suppose que l'intervalle compris entre les abscisses extrêmes a été divisé en un nombre pair de parties égales. —



Soit h l'intervalle constant compris entre deux ordonnées consécutives.

L'aire est comprise entre les deux aires

$$h\left(2\sigma - \frac{y_2+y_{2n}}{2} + \frac{y_1+y_{2n+1}}{2}\right).$$

et $h \times 2\sigma$.

en posant $2\sigma = 2(y_2+y_4+ \ldots + y_{2n})$.

on prend pour l'aire approchée

$$h.\left\{2\sigma - \frac{y_2+y_{2n}}{4} + \frac{y_1+y_{2n+1}}{4}\right\}.$$

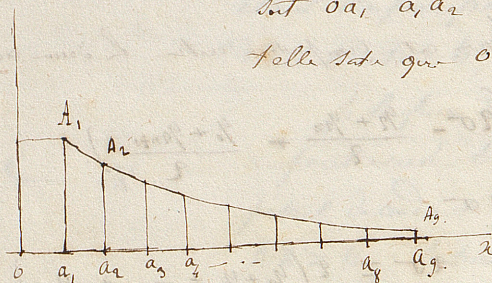
l'erreur sera plus petite que $\left\{\frac{y_2+y_{2n}}{4} - \frac{y_1+y_{2n+1}}{4}\right\}h.$

on peut avoir une expression géométrique de cette erreur. de suite qu'on l'inspection même de la courbe, on voit l'erreur commise de suite qu'il a voit immédiatement si le nombre des ordonnées calculées est suffisant, c'est l'avantage de cette méthode sur les autres. —

~~[illegible]~~. Exemple Supposons qu'on introduise dans une pièce de canon cylindre de bronze, renfermant de l'air comprimé, et ensuite un boulet. — Si on lâche une détente, le gaz s'échappera et chassera le boulet. — Supposons qu'on partage la pièce en parties d'égale longueur, dans chacun des intervalles on connaîtra la force élastique du gaz; comme on connaît aussi le chemin parcouru, on pourra calculer le travail total de la force pendant le temps que le boulet met à sortir du canon —

Gaz comprimé à 1200 atmosph.; le volume ~~de~~ primitif ~~la~~ du gaz ~~[illegible]~~ est le $\frac{1}{9}$ de l'âme de la pièce; la longueur de la pièce est de $3^m,1$. —

prenons une droite, sur laquelle nous prendrons 9 parties égales, chacune représentera le $\frac{1}{9}$ de la longueur de la pièce, soit Oa_1, a_1a_2 —— a_8a_9 les différentes parties ; de telle sorte que Oa_9 représente la longueur de la pièce. — au commencement la force élastique du gaz est de 1200 atmosph. au point a_1 élevons a_1A_1 qui représentera 1200 ; quand le boulet sera en a_2, le volume du gaz sera doublé la force élastique sera 2 fois plus petite — au point a_2 élevons a_2A_2 perpendicul. sur OX ; et prenons a_2A_2 égale à la moitié de A_1a_1, de sorte que A_2a_2 représentera 600 atmosphères — quand le boulet sera en a_3 le volume du gaz sera triplé. la force élastique sera seulement de 400 atmosph. ; alors on prendra a_3A_3 égale à 400, et on continuera ainsi jusqu'à a_9 inclusivement, en joignant les points par un trait continu on aura une courbe dont l'aire représentera le travail total de la force. ici on peut avoir cette aire exactement, car on connait la courbe. c'est une hyperbole ; car ici le produit xy est constant. — l'équation de l'hyperbole sera $xy = Oa_1 \times A_1a_1 = 1200 \times \frac{3,1}{9} = 413,32$ environ ou $xy = m^2$ — l'aire $A_1a_1a_9A_9$ est $m^2 L.9. = 908,18$ — cette expression ne représente pas le travail. — car notre pression est évaluée en atmosphères — la pression de l'air par cent. carré est $1^{kil},033$. — il faut tenir compte de la section de l'âme de la pièce — le diamètre de pièce de 24 est $0^m,15$. alors la section de l'âme est $\frac{3,1416 \cdot (0,15)^2}{4} = 176$. cent. carré. il faut multiplier 176 par 1,033. — ; il faut multipl. 176 par 1,033 et le nombre de kilos obtenus sera le nombre de kilos fournis par la pression d'une atmosphère — on trouve 181.81. multipliant par 908,18 on a le travail en kilogrammètres. on trouve 165116^{km}.



Lignier

Cours de mécanique

effort moyen — c'est une force fictive constante, capable de produire le même travail que la force variable appliquée au mobile. on suppose que cet effort agit tangentiell. à la trajectoire; — si donc l est le chemin parcouru, le travail de l'effort moyen sera Fl — on aura donc $Fl = \Sigma T.\varepsilon$. d'où

$$F = \frac{\Sigma T \varepsilon}{l}.$$

ordinairement dans la pratique la courbe du travail est sinueuse, mais elle reste toujours à peu près parallèle à l'axe des x, comme à la figure; on préfère substituer à ce travail variable, un travail constant uniforme qui produise le même effet que le travail variable; on remplace cette courbe par une parallèle à l'axe des x —

dans le travail nous n'avons pas introduit l'idée du temps — souvent dans les machines à vapeur on arrive à considérer des nombres de kilogrammètres trop considérables et embarrassants. alors on estime le travail à la seconde.; on prend une autre unité, qui est le cheval vapeur; cette unité représente un travail de 75 kilogrammètres par seconde. —

le travail élémentaire d'une résultante de deux forces est égal à la somme algébrique des travaux élémentaires des deux composantes. —; et ceci a lieu pour un nombre qlq. de forces.

Soit R la résultante des forces $P\, P'\, P''$ — appliquées en un même point M. soit MM' le chemin infiniment petit parcouru par le mobile M — soit a l'angle que R fait avec MM', $\alpha\ \alpha'$ — les angles que P, P' — font avec MM'. on a

$$R \cos a = \Sigma P \cos \alpha.$$

Multipliant deux membres par ε le chemin parcouru, il vient

$$R \varepsilon \cos a = \Sigma P \cos \alpha\, \varepsilon. —$$

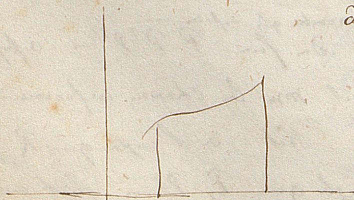
Comme cette relation a lieu pendant toute la durée du mouvement, elle

80v

s'applique au travail total des forces. —

Condition d'équilibre des forces appliquées à un même point; il faut et il suffit que la somme algébrique des travaux élémentaires soit nul pour un déplacement qlq. — car si le point était libre, il faut que la résultante soit nulle; s'il n'est pas libre il faut que la résultante soit normale à la courbe ou à la surface sur laquelle il est assujéti à rester. — Dans ces différents cas le travail est nul. — pour s'assurer que la résultante est nulle, il faut que la somme des travaux soit nulle par rapport à 3 axes non situés dans un même plan —

Relation entre la force vive et le travail — supp. que m décrive une trajectoire; — supp. que ce point soit libre, il est sollicité par une force P; cette force peut être décomposée en deux autres, l'une centripète, l'autre tangentielle —; ces deux forces ont pour expression $\frac{mv^2}{\rho}$, mv'. —; par conséquent le travail élém. de P est égal à la somme algébrique des travaux élément. des 2 composantes. —; la force centripète ne donne pas de travail — donc le travail de la force P est égal à $mv'\varepsilon$, ε étant l'élément de chemin de parcouru; maintenant $\varepsilon = v\theta$. donc le travail de la force P est égal à $mvv'\theta$. — le travail total effectué en passant d'une position à une autre sera $\Sigma_t^{t'} mvv'\theta$, ou bien $\Sigma_t^{t'} \theta . x$ (dérivée de $\frac{mv^2}{2}$). —; pour avoir l'évaluation du travail on prendra 2 axes. l'abscisse représentant le temps et les ordonnées représentant les dérivées des forces vives. — L'aire de la courbe ainsi obtenue sera le travail de P. Cette aire est donc fonction du temps, qui a pour dérivée l'ordonnée; mais l'ordonnée est dérivée de $\frac{mv^2}{2}$, par suite en désignant par τ le travail de la force P, on aura $\tau = \frac{1}{2}mv^2 + C$



Si le point mobile n'etait pas libre, on pourrait le considérer comme libre, en introduisant la reaction de la courbe ou de la surface, ce qui ne modifierait pas le travail, en supposant qu'il n'y ait pas frottement.

Force d'inertie — quand on tire un corps au moyen d'un cordon le long d'une ligne droite, de maniere a lui faire parcourir un mouvement acceleré ; si on introduit un dynamometre entre deux parties de la corde, le dynamometre accuse une tension constante. Ce qui montre que les deux extremités du fil sont soumises à une tension constante, il est tiré dans un sens par la force motrice, et dans le sens opposé et par la reaction du corps ; c'est cette réaction qu'on appelle force d'inertie.

On etend ce principe à deux points à tout systeme de points materiels agissant l'un sur l'autre, qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas de liens entre les points ; ainsi soient deux points m et m' agissant l'un sur l'autre ; l'action a lieu sur la droite qui joint le point m et le point m', en supposant que m et m' ne soient pas comparables à la longueur mm' ; si m agit sur m' de maniere a lui donner une certaine quantité de mouvement, on admet comme principe que m' agira sur m pour lui communiquer la même quantité de mouvement. On accepte cela comme une maxime. (precedemment en supposant des liens physiques, ici c'est une induction). Ceci ne parait pas evident à priori ; c'

m' ——— m

Quand il s'agira d'un point m faisant partie d'un systeme quelconque, on appelle force d'inertie de ce point m, une force egale et contraire a celle qui produirait le mouvement de ce point m, s'il etait libre. Cette force d'inertie est toute fictive. — la force effective se decomposant en deux l'une centripete l'autre tangentielle, la force d'inertie se decomposera

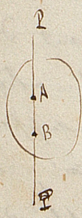
81 v

les deux forces l'une centrifuge, l'autre centripète — on dit souvent que $\frac{1}{2}(mv_1^2 - mv_0^2)$ qui est egal au travail de la force motrice est egal au travail de la force d'inertie — . C'est ce que appellent quelques fois le travail de l'inertie —

Forces appliquées à un corps solide —

dans la nature il n'y a pas de corps reellement solides — les corps de la nature sont tous peu delatables, tres peu extensibles ; c'est seulement quand sous l'influence des forces qui leur sont appliquées ils ont acquis leur maximum d'extensibilité, qu'on peut les supposer solides — .

On peut transporter le point d'application d'une force en un point quelc. de sa direct. pourvu que ce point soit lié invariablement au premier — . Pour demontrer ceci on s'appuie sur un lemme ; on suppose que deux forces egales appliquées en sens contraires à deux points de la meme direction se font equilibre. Ceci peut etre accepté en admettant que tout est symetrique autour de AB ; mais alors on admet que l'action se transmet de A en B de molécule à molécule — . Du reste ce principe peut se verifier par l'experience au moyen du dynamometre —



Le travail élémentaire de la force est le même pour tout deplacement élémentaire de la droite d'application (demonstrat. geometrique comme dans Sturm — on demontre que 1° des forces agissant aux extremit. d'une même droite les moments virtuels sont egaux et de ~~même~~ signe contr.

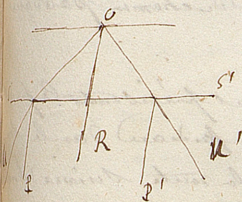


Lignier

Cours de mécanique

Composition et equilibre des forces concourantes en un même point d'un corps solide. — d'après ce qui vient d'être dit on pourra transporter toutes les forces au même point de concours. — le travail des forces n'aura pas changé. — et alors pour qu'il y ait equilibre il faut que la somme des travaux elementaires soit nulle —

Composition des forces parallèles au moyen du parallelogramme des forces —. Le travail de la resultante est alors egal à la somme des travaux des composantes. — Centre des forces parallèles le moment de la resultante est egale à la somme des moments des composantes —



Le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes — en effet. ~~le travail des forces P, P' est egal au travail des forces U et V, qu'on peut supposer appliquées au point O.~~ on a $\mathcal{E}.R = \mathcal{E}U + \mathcal{E}U' = \mathcal{E}P + \mathcal{E}S + \mathcal{E}P' - \mathcal{E}S' = \mathcal{E}P + \mathcal{E}P'$. donc le travail de la resultante est egale à la somme des travaux des composantes. — ce theoreme est demontré pour deux forces parallèles — si on a un nombre quelconque de forces, il en sera encore de même. —

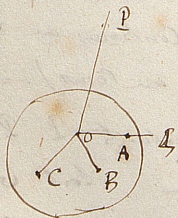
à l'occasion des forces parallèles, quand on cherche la resultante de deux forces egales parallèles et contraires on rencontre le cas du couple —, (on le montrera dans un cours). —

Si on considere un syst. de corps pesants P P' P'' — dont les centres de gravité sont en g g' g'' — soit G le centre de gravité du système, au point G on a une resultante egale à P + P' + P'' — ; et le travail de la resultante sera egal à la somme des travaux des composantes ; si le système se meut de telle sorte que la projection du deplacement de g sur la verticale soit h — ; la somme des travaux elementaires sera Ph + P'h' + et cette somme sera egale à $(P + P' + P'' + \ldots) H$, H étant la ~~projecti~~ proj. sur la verticale du deplacement du centre de gravité du système. —

autr. demontt. qui repose sur les moments —

on a
$$RZ = \Sigma pz$$
Z est la distance du centre de gravité du système à un plan ~~parallèle~~ perpendiculaire au plan. z la distance du centre de gravité d'un des corps au même plan. on donne un déplacement, supposons que Z devienne Z_1, z dev. z_1, z' devienne z'_1 etc; on aura encore
$$RZ_1 = \Sigma pz_1$$
retranchons membre à membre il vient
$$R(Z - Z_1) = \Sigma p(z - z_1) —$$
Le second membre représente bien la somme des travaux de toutes les molécules. ; $(Z - Z_1)$ est la projection sur la verticale du chemin parcouru par le centre de gravité du système —

dans l'industrie ce que l'on rétribue c'est précisément le produit du poids par la hauteur d'élévation du fardeau dans le sens vertical — on ne tient pas compte de la route suivie horizont. à moins que la route suivie horizontalement ne soit trop considérable c'est un travail à payer à part —

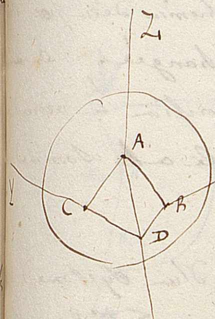


Composition et équilibre des forces appliq. à un corps solide

Soit un corps auquel est appliqué une force P; cette force peut être décomposée en 3 autres passant par points points du corps — A, B, C —. soient A, B, C 3 points du corps, joignons O aux points A, B, C; on pourra décomposer la force P suivant les trois directions OA, OB, OC par la règle du parallélipipède, et on pourra ~~composer~~ ensuite transporter les trois composantes aux points A, B, C, situés sur leur directions; on pourra répéter la même chose pour les forces appliquées au corps —

Supp. qu'on repete cela pour toutes les forces qui peuvent etre appliquées au corps; il est evident qu'on sera ramené a 3 groupes de forces, appliq. en A, en B, en C. les forces appliq. en A peuvent se reduire à une seule de même pour les forces appliq. en B, et celles appliq. en C. —

Suppos. cela fait, soit X la force appliquée en B. soit Y la force appliquée en C; et Z la force appliquée au point A. —



on peut reduire les trois forces a deux dont l'une passera en A par exemple ~~et~~ en effet:
les plans ABX, ACY se coupent suivant une certaine droite AD; si ces deux plans se confondaient, AD serait une ligne qlq. tracée dans ce plan et passant par le point A; soit D un point de cette droite. — joignons le point D au point C et au point B. — on peut décomposer X en deux forces x et x' suivant AB et BD, ce qui est possible puisque AB et BD sont dans un même plan avec BX; de même je décompose la force Y en deux forces y et y' dirigée suivant CA et CD. les deux forces x' y' concourent en D, on peut les y supposer appliquées, et les composer en une resultante U; de même les forces x et y concourent en A, on peut les composer[x] en une seule force V appliquée en A. —

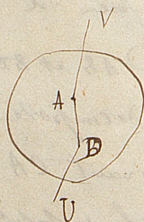
[x] avec la force Z

Donc un systeme qlq de forces appliquées à un corps solide peut toujours se reduire à deux U et V, dont l'une V passe ~~~~ par un point A donné arbitrairement dans l'interieur

on ~~aura~~ $\sum \mathcal{T} P = \sum \mathcal{T} U + \mathcal{T} V$. —

c'est facile à voir ; on a ~~r~~ remplacé chaque force P par ses composantes passant en A, B, C — ; or dans le parallélipipède des forces, le travail de la résultante est égal ~~au travail~~ à la somme des travaux élémentaires — donc par cette première décomposition la somme des travaux des forces n'a pas été changée ; en ~~[illegible]~~ poursuivant la série des transports et des décompositions on verra que la somme des travaux des composantes est égale à la somme des travaux des deux forces U et V.

Ceci posé, la condit. d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide est que $\sum \mathcal{T} P = 0$ pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons du système —



En effet, pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces U et V soient égales et directement opposées — ; c'est à peu près évident ; on peut dire cependant si l'équilibre existe, il ne sera pas troublé en fixant le point A ; dans ~~ce~~ ~~cas~~ ~~passera par le point A~~. mais alors l'effet de la force V sera détruit, il ne restera que la force U, dont l'effet sera de faire tourner le corps autour du point A, à moins que U ne passe par le point A ; on démontrerait de même en fixant le point D que la force V doit être dirigée suivant AD. donc les deux forces ne peuvent se faire se faire équilibre que si elles sont égales et de sens contraire.

Il faut remarquer que la condition d'équilibre n'implique pas le repos du corps ; ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ; il pourrait être animé d'un mouvement qlq et c'est dans l'hypothèse d'un mouvement qlq qu'on devrait avoir $\sum \mathcal{T} P = 0$.

~~[illegible]~~ Il est vrai que dans le cours de la démonstration nous nous sommes appuyés sur ce que le corps était en repos. et cela est permis, attendu que si des forces appliquées à un corps en mouvement se font équilibre, elles devraient encore se faire équilibre dans le cas où le corps serait en repos. —

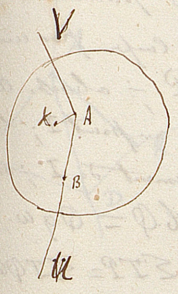
11 84

Lignier

Cours de mécanique

Si les forces U et V sont égales et contraires on aura
$$\Sigma' U + \Sigma' V = 0$$
donc on aura $\Sigma \Sigma' P = 0$ —

La réciproque est elle vraie ? si on a $\Sigma \Sigma' P = 0$ pour tout déplacement possible, il y aura encore équilibre — les effets se disque si cette condition est remplie, les forces U et V seront égales et contraires ; ~~en effet~~ on a par hypothèse $\Sigma' U + \Sigma' V = 0$.



et cela a lieu pour tout déplacement possible ; or parmi tous les déplacements on peut en imaginer un dans lequel le point A serait fixe, et le corps tournerait autour du point A alors le travail de V est nul ; donc le travail de U doit être nul ; donc U est normale au déplacement — or B décrit une sphère dont le centre est en A ; donc U doit concourir en A. on ferait voir de même que V doit concourir en B. ; donc les forces sont sur le prolongement l'une de l'autre. Supposons les appliquées en A ; si on donne au système un déplacement qlq. AK, on ne pourra avoir $(V+U) AK = 0$ qu'autant que $V = -U$; donc les deux forces U et V sont égales et directement opposées —

C'est de cette équat. qu'on déduira dans chaque cas les condit. d'équilibre —

On peut avoir les équat. d'équilibre des forces appliquées à un corps solide — si on déplace le corps parallèlement à l'axe des x, de manière que chaque point parcoure un élément de chemin ε alors la somme des travaux sera $\Sigma X\varepsilon = 0$, ou $\varepsilon \Sigma X = 0$ on aurait de même $\Sigma Y = 0$ $\Sigma Z = 0$.

avec 3 trois rotations autour de chacun des trois axes, on aura les trois equations des moments. — donnons une rotation autour de l'axe OZ. — soit P une force appliquée. decomposons-la en deux, l'une Z parallele à OZ, et l'autre perpendiculaire à cet axe. — pour un deplacement obtenu en faisant tourner le corps autour de OZ on aura $\mathcal{T}P = \mathcal{T}Z + \mathcal{T}\varphi$; or $\mathcal{T}Z = 0$ puisque Z est perpendiculaire au chemin parcouru ; donc $\mathcal{T}P = \mathcal{T}\varphi$. soit a le point ou l'axe OZ est coupé par un plan perpend. passant par le point d'appl. de P. — abaiss. aI perpend. sur φ ; et transport. le point d'applic. de φ au point I ; le travail de φ est egal a φ multiplié par le déplacement de I ; or I se deplacera tangentiellement à Iφ ; on aura $\mathcal{T}\varphi = \varphi q \omega$; $q = aI$; ω est le deplacement du point I ; donc $\Sigma\mathcal{T}P = \Sigma\mathcal{T}\varphi\omega = 0$, donc $\Sigma\mathcal{T}\varphi = 0$ — on aurait de meme les deux autres equations —

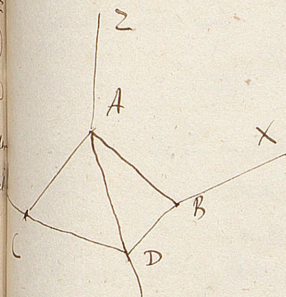


on a 6 equat. — ; ces equat. sont necessaires sont elles suffisantes. — oui car elles expriment que les forces U et V sont egales et contraires. —

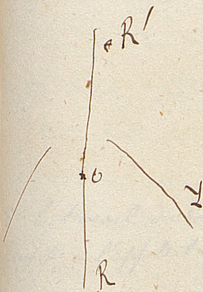
en effet : appl. les 3 1res equat. aux deux forces U, V elles signifient que les forces sont egales, paralleles et de direction contraire. — car soit X, Y, Z, les compos. de U, X', Y', Z'. celles de V. on a donc X = −X' Y = −Y' Z = −Z'. donc les deux forces sont egales et contraires ;

elles sont direct. opposées. — en effet, supposons que la décomposit. ait été faite de telle sorte que la force U ait été appliquée en O à l'origine ; l'autre force V sera appliquée en un point qlq. B. — ; or ~~le travail de ... est nul pour les moments~~ on a L = 0 M = 0 N = 0 ; or L est la somme des moments des forces par rapport à OX ; alors U ne donne rien dans L ; donc le moment de V par rapport à OX est nul. ; donc la force V est dans un meme plan avec OX. on demontrerait de meme

qu'elle doit se trouver dans un même plan avec OY et OZ; donc V doit passer en O; les deux forces U et V qui sont égales parallèles et ~~directement opposées~~ et de sens contraire, sont directement opposées puisqu'elles passent par le même point; donc elles se font équilibre. —



3 forces qui se font équilibre sur un corps sont nécessairement dans un même plan; soient X, Y, Z trois forces appliquées aux points C, B, A. — on sait que les forces peuvent être ramenées à deux forces dont l'une passe en A, et l'autre à un point de AD, AD étant l'intersection des plans ABX, et ACY. — puisqu'il y a équilibre les forces U, V doivent être égales contraires et dirigées suivant DA. — rappelons nous les compos. de la force applig. en D; elles sont dirigées suivant DB et DC; comme la résultante est située dans un même plan avec ~~DA, DC~~ ses composantes, il s'ensuit que DA est dans un même plan avec DB, DC; mais DAB contient X; DAC contient Y; donc X et Y sont dans un même plan; maintenant la force Z doit être dans le plan des deux premières pour faire équilibre à leur résultante.



Ce théorème revient à celui ci; deux forces ne sauraient avoir de résultante unique si elles ne sont pas dans un même plan; soit X et Y ces deux forces, soit R leur résultante. si on applique en un point de la direct. de R une force R' égale et contraire à R, l'équilibre devra exister entre R', X, Y. donc les forces sont dans un même plan; donc X, Y sont dans un même plan —

Lignier

Cours de Mécanique

Une machine est un système de corps solides destinés à transmettre l'action des forces; ces corps ne sont pas libres : ils sont gênés; il existe des obstacles qui permettent d'equilibrer des forces qui sans cela ne pourraient pas se faire equilibre. Il est facile de comprendre l'action de ces obstacles; supposons un corps pesant; si on veut le soulever il faudra lui appliquer une force égale et contraire; mais si on a un point fixe comme dans le levier, il suffira d'une force beaucoup moins considérable pour produire le même effet —

On appelle machine simple la machine où il n'y a qu'un seul obstacle — si l'obstacle est un point fixe on a un levier — si l'obstacle est un axe fixe, on a un treuil etc —

Les mach. ne sont utiles qu'autant qu'elles sont en mouvement —, il y a 3 espèces de forces bien à distinguer —

forces mouvantes; ce sont celles dont on dispose, et qui doivent mettre la machine en mouvement; ce qui caractérise ces forces, c'est que le chemin parcouru par le point d'applicat. fait un angle aigu avec la direct. de la force ×

× le travail de la force est positif; on l'appelle travail moteur

résistances utiles. ; ce sont les résistances que la machine a pour but de vaincre; le point d'applicat. de la résistance décrit un chemin faisant un angle obtus avec la directi. de la force; il en résulte un travail appelé travail résistant. Ce travail résistant est négatif — . Les résistances utiles sont, par exemple la résistance du grain qu'on veut moudre, la cohésion d'un corps qu'on veut déformer etc —

résistances passives. Ce sont des forces qui exigent du travail en pure perte; comme le frottement et la résistance des milieux, la raideur des cordes, — le frottement de l'axe d'une poulie sur les coussinets; il arrive encore que differents ~~supports~~ de la machine sont animés d'un mouvement vibratoire —; tout cela consomme du travail en pure perte.

Soit T_m le travail moteur total de la machine —
T_u le travail restant utile
T_p le travail restant passif

Quand une machine fonctionne bien, elle s'arrange de telle sorte qu'elle ait un mouvement uniforme; alors toutes les forces appliquées à la machine doivent se faire equilibre; donc on a

$$T_m - T_u - T_p = 0.$$

On tire de là $T_m = T_u + T_p$.

Or T_p n'est jamais nul; donc une machine ne rend jamais autant de travail utile qu'on lui en donne; les meilleures machines sont celles qui perdent le moins de travail moteur. Le travail moteur est toujours plus grand que le travail utile — il y a toujours au moins 1/4 du travail moteur perdu.

× on a toujours $T_m > T_u$.

Les liaisons d'une machine sont telles, qu'elles ne laissent plus que deux mouv. contraires — de telle sorte que connaissant le mouvement d'un point, et le sens du mouvement on connaitra le mouvement de tous les autres points —

Donc il suffit d'une seule equat. pour determiner le mouvement de la machine. Ce sera si l'on veut l'equat. des forces vives, elle est $\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2(T_m - T_u - T_p)$.

Si la machine est en repos, on a $\Sigma m V_0^2 = 0$, et comme le 1er membre est positif, on doit avoir $T_m > T_u + T_f$. donc quand une machine se met en mouvement, le travail moteur doit être plus grand que la somme des résistances. — ainsi la diff. mobile de la machine partant d'une vitesse nulle, et elle va en augmentant jusqu'à ce qu'elle ait atteint une valeur maximum qu'elle ne dépassera plus; car les forces mouvantes sont limitées et les résistances croissent. — ainsi quand une roue est mise en mouvement par un cours d'eau, sa vitesse est nulle d'abord; elle va en augmentant mais elle ne dépasse pas la vitesse du cours d'eau; quand un cheval traîne une voiture, il ne pourra pas dépasser une certaine vitesse qui est celle qu'il prendrait s'il était libre. Dans toute bonne machine on fait en sorte que le mouvement le montre à peu près uniforme. (*)

(*) ~~toute sa vitesse~~. Si on suppose la machine dans cet état, le premier membre sera nul et l'on aura $T_m = T_u + T_f$.

Si dans une machine on supprimait le travail moteur on aurait $T_m = 0$; suppos. que la machine marche à vide, — c'est-à-dire qu'on n'ait pas à produire de travail utile, on aura aussi $T_u = 0$. il restera donc

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m V_0^2 - 2T_f$$

mais à mesure que le temps croît, les résistances augmentant, il arrive un moment où $2T_f = \Sigma m V_0^2$; à partir de ce moment $\Sigma m v^2 = 0$; la machine s'arrêtera; ceci montre l'impossibilité du mouvement perpétuel —

Supposons une machine élevant un poids P à une hauteur h, le travail moteur est Ph. le poids en redescendant restituera cette quantité de travail; mais il ne la restitue pas toute en effet utile; il y aura une certaine somme de travail perdu absorbé par les frottements; c'est ce qui arrive dans les tournebroches, dans les vieilles horloges —

87 v

Le but que l'art se propose est de transformer de transmettre le travail moteur. — on peut au moyen des machines, distribuer le travail là où il est utile — on n'a pas pour but d'augmenter le travail moteur, de produire de grands effets avec de petits moyens —

Une machine ne peut point se mouvoir rigoureusement d'un mouv. uniforme — cela tient à deux causes; c'est que les forces mouvantes, ne sont pas tout à fait constantes; ainsi que les forces resistantes, — il resulte de là que le mouv. des machines est periodique; les vitesses redeviennent les mêmes qu'après le même intervalle — à la fin de chaque periode, on a $v = v_0$ et à ce moment là $Tm - Tu - Tf = 0$;

mais dans le cours de chaque période les vitesses varient, or il faut dans une bonne machine, il faut atténuer les variations autant que possible — on y parvient par l'influence des masses.

Soient m, m', m'' les masses des molecules; la somme des forces vives $= mv^2 + m'v'^2 \ldots = (m + m' + \ldots)K^2 = MK^2$

× K est une moyenne entre les vitesses. —

Si M est grand, il n'y aura pas besoin que K varie beaucoup, pour que MK^2 varie; donc pour répondre à une variation inevitable dans ~~la vitesse de la machine~~ dans la somme des forces vives de la machine, plus la masse sera considérable, moins les vitesses varieront sensiblement.

D'une autre part augmenter la masse de la machine c'est augmenter la dépense —. voyons la manière la plus avantageuse de ~~diminuer~~ remedier à cet inconvenient

Lignier

Cours de mécanique —

Dans une machine il y a trois parties essentielles ; la partie à laquelle sont appliquées les forces mouvantes, celle à laquelle sont appliquées les résistances, et enfin celle qui établit une liaison entre les deux premières —

Les mouvements de ces trois parties sont ... pour chacune d'elles Σmv^2 est une fonction périodique du temps ; si ces trois parties existaient seules, la dérivée de Σmv^2 changerait de signe alternativement

Le volant est une ... pièce qu'on introduit dans les machines ; c'est une roue de forte mobile autour d'un axe horizontal, soit ω la vitesse angulaire du volant — La force vive du volant sera $\Sigma mr^2\omega^2 = \omega^2 \Sigma mr^2$. pour que le volant ait plus d'effet possible pour la même masse, on met toute la masse du volant à la circonférence. introduisons le volant dans la machine, désignons pour le volant Σmr^2 par μ ; l'équation des forces vives deviendra

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = (T_m - T_u - T_f) - \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

d'où $T_u = (T_m - T_f - \frac{1}{2}\Sigma mv^2) - \frac{1}{2}\mu\omega^2$. —

on pourra disposer de ω de façon que les variations du 2e membre soient très faibles, et par conséquent que T_u varie très peu ; plus μ sera grand, plus il

88

sera facile d'atteindre ce but en faisant peu varier ces.

Quand deux corps se choquent il y a une perte de force vive égale à la somme des forces vives des vitesses perdues ; Dans les machines où ce genre de [illegible] les corps sont peu élastiques, chaque choc produit une perte notable de forces vives — soit $\Sigma m u^2$ une perte faite par un choc on aura après le choc

$$\frac{1}{2}\Sigma m v^2 = Tm - Tu - Tp - \frac{1}{2}\Sigma m u^2.$$

Si donc on veut ramener la machine à son état primitif comme on ne peut disposer que du travail moteur, il faudra faire une dépense de forces mouvantes capable de développer une force vive $= \frac{1}{2}\Sigma m u^2$. ; il faut donc éviter les chocs dans les machines —

Le choc des corps peut cependant être utilement employé dans certains cas. — par ex. quand on veut enfoncer des pilots avec un mouton, on obtient par le choc des effets qu'on n'obtiendrait pas par une pression permanente. supposons que le mouton pèse 300k. et tombe de 1m,30 de haut. ; supposons que le pilot s'enfonce de 2 centimètres ; de sorte que le chemin parcouru par le mouton sera 1m,32 ; le travail sera $300 \times 1^m,32 = 396$ kilogrammètres

Voyons quel poids il aurait fallu placer sur le pilot pour produire le même travail ; le pilot devant s'enfoncer de 0m,02, on aura la relation

$$x \times 0,02 = 396$$

d'où $x = 19800$ kilogrammes; ceci montre bien quelle est l'influence du choc;

Remarquons encore que le choc se produit et s'amortit dans un temps très court. — en effet, on peut supposer que la résistance au mouvement est de 19300 kil., tandis que dans le sens de la descente, on n'a qu'une force de 300 k.

l'équation du mouvement sera

$$\frac{300}{9,81}\varphi = 300 - 19800$$

$$\varphi = -\frac{19500 \times 9,81}{300}.$$

c'est un mouvement uniformément retardé! — en intégrant on a

$$v = v_0 + \varphi t$$

ici $v_0 = 5^m,05$ $5^m,05$ est la vitesse due à une hauteur de chute égale à $1^m,30$ — — le mouton s'arrêtera quand la vitesse sera nulle; quand on aura $v=0$; soit θ le temps au bout duquel $v=0$ on aura

$$0 = v_0 + \varphi\theta \quad \text{d'où} \quad \theta = -\frac{v_0}{\varphi} = \frac{5^m,05}{19500 \times 9,81} = \frac{1''}{125}$$

le mouton ne met que $\frac{1}{125}$ de seconde à s'enfoncer.

Dans les fondations on enfonce les pieux jusqu'à ce que 30 coups de mouton n'enfoncent plus que de 5 millimèt. on a reconnu qu'alors les pilotis pouvaient être chargés de 25000 kilogrammes sans aucun danger. —

Nous devons maintenant faire entrer la notion du temps dans l'idée du travail. Quand on s'occupe du travail des machines on doit se préoccuper non seulement de l'effet total de la machine, mais encore du temps employé pour le produire.

On appelle cheval-vapeur, le travail qui élève à 1 mèt de hauteur 75 Kilog. en 1". Il ne faut pas confondre le cheval vapeur avec le cheval ordinaire. – Soit P l'effet moyen qu'un cheval ordinaire peut exercer

V la vitesse –

t le nombre d'heures qu'il peut travailler par jour

celui PVt sera l'effet utile produit par le cheval dans un jour. – L'expérience a montré que ces 3 éléments ne doivent pas dépasser certaines limites; pour chaque x mode d'emploi du cheval, ce produit est susceptible d'un maximum qu'il ne faut pas dépasser. – Voici quelques nombres trouvés par l'expérience –

x à égalité de fatigue

	effet moyen	vitesse par 1"	travail par 1"	durée du travail journalier	travail to[tal]
Cheval au pas attaché à une voiture	70 Kilos	0,90 m	63 K.mèt.	10 h.	2268000 Km
Cheval au trot à une voiture	44	2,20	96,8	4 h,5	1568160
Cheval au manège au pas	45	0,90	40,5	8	1166400
au trot	30	2,20			

On peut comparer le cheval vapeur au cheval réel –; le cheval vapeur représente un travail de 75 k par 1" et travail 24 h. donc ce produit un travail = 75 × 24 × 36[00] Km

le rapport au travail du cheval au manège sera $\frac{75 \times 24 \times 3600}{40,5 \times 8 \times 3600}$ = 5,[...]

Legner.

Cours de Mécanique

Le travail de l'homme peut être utilisé de bien des manières différentes. — par exemple pour élever des fardeaux, on peut le supposer placé dans un plateau, et élevant un poids égal au sien au moyen d'une poulie. Ce moyen a été reconnu comme le plus avantageux. Dans les terrassements du fort de Vincennes, un homme a pu par jour élever 70 kil, 310 fois à la hauteur de 13 m. — Le travail total est de 282200 k.metr = 13 x 70 x 310.

Un ouvrier faisant mouvoir une manivelle ne peut exercer qu'un effort moyen de 8 k. sa main parcourant 0,75 m par seconde, à l'extrémité d'un rayon égal à 0,35 — il peut travailler 8 heures par jour. Le travail par seconde est 6 k.metr. Le travail total sera 172800 k.metres —

Le travail le plus défavorable est le travail à la pelle — Un ouvrier élevant de la terre à 1 m,60, le poids élevé étant 2 k,5, le chemin parcouru étant 0,40 — le travail durant 10 h, le travail total sera 26800 —

Dans une roue à chevilles, le travail de l'homme est assez avantageux, l'homme peut exercer un effort moyen de 60 k.mètres —

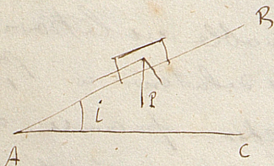
3

Lois du frottement —

Les corps les mieux polis présentent à leur surface des aspérités, et lorsque les corps sont en contact, les aspérités s'engrènent les unes dans les autres. — Indépendamment de cet engrènement, il y a un refoulement en vertu duquel le plus petit corps s'emboîte dans le plus grand. — L'engrènement moléculaire et l'emboîtement des deux corps font naître des résistances tangentielles qu'on nomme frottement. —

Il y a deux espèces de frottement, ~~le frottement~~ de glissement. Le frottement rectiligne comme celui d'un traîneau; le frottement curviligne tel que le frottement des axes dans les coussinets. —

Amontons en 1699 avait cherché à établir les lois du frottement. — Supposons un corps pesant placé sur un plan incliné AB, lequel plan est mobile autour d'une charnière, de telle sorte que l'angle BAC peut varier. — Le poids du corps peut se décomposer en deux autres, l'une ~~normale~~ P cos i normale à AB, l'autre P sin i parallèle à AB — . L'expérience prouve que le corps se maintient en équilibre sur le plan, tant que l'angle i n'a pas atteint une certaine limite. Cet angle limite est ce qu'on appelle l'angle de frottement. — Soit f le rapport du frottement à la pression normale. — Le frottement aura pour expression f × P cos i; tant que on aura f P cos i > P sin i, le corps restera en repos; soit φ l'angle d'inclinaison

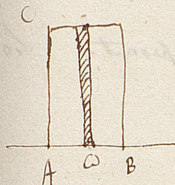


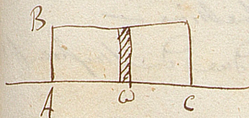
restant au moment où l'équilibre va se rompre, à ce moment là on aura

$$P \sin \lambda = f \cdot P \cos \lambda. \quad \text{d'où}$$

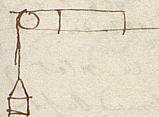
$$tg\, \lambda = f.$$

L'expérience pourra donner λ pour chaque corps; on pourra donc ainsi avoir la valeur du frottement au moment du départ. — Amontons avait reconnu que l'angle λ est le même quelle que soit la charge du corps; donc, toutes choses égales d'ailleurs, le frottement est proportionnel à la pression. On avait encore reconnu par le même mode d'expérience que le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes. Ceci n'a rien de paradoxal. Supposons un corps prismatique placé sur sa plus petite face: le frottement sur chaque élément ω ne dépendra que du poids du petit prisme qui est au dessus de ω. Le frottement total sera $(\omega + \omega' + \ldots)\, AC = AC \times \text{sup. } AB$. — Si on retourne le corps sur sa plus grande face, le prisme pesant sur chaque élément est moins lourd; le frottement total est $AB \times \text{sup. } AC$; c'est toujours le même produit. — Amontons avait donné des nombres trop grands. —





Les expériences de Coulomb ont été faites à Rochefort en 1781. — Il avait un banc horizontal sur lequel glissait un traineau, qu'on pouvait charger de poids. Une corde attachée au traineau passait sur une poulie, et soutenait un plateau chargé de poids, descendant dans un puits de 4 pieds de profondeur. Il pouvait faire varier les surfaces frottantes; pour cela il pouvait clouer sur le banc deux règles longitudinales de la



91v

matière qu'il voulait étudier, et il clouait sous le traineau deux règles de même nature — il pouvait faire varier l'étendue des surfaces frottantes, en clouant sous le traineau des prismes arrondis —

Voici des nombres obtenus en faisant frotter des pièces carrés de chêne contre chêne —

Le traineau pesant 74 liv., il en fallait que le plateau en pesât 30 pour que le mouvement put se produire, le rapport du frottement à la pression est $f = \frac{30}{74} = 0,40$ —

2e expérience —

le traineau pesait 874 l. — le plateau pesait 406 livres

le rapport est $f = \frac{406}{874} = 0,46$ —

3e expérience —

le traineau pesait 2474 — le plateau pesait 1116 —

le rapport $f = \frac{1116}{2474} = 0,45$

ainsi le rapport est sensiblement constant, donc le frottement est proportionnel à la pression —

en faisant varier l'étendue des surfaces frottantes voici les nouveaux nombres obtenus.

Traineau		Plateau		rapport
250	—	106	—	$\frac{106}{250} = 0,42$
450	—	186	—	$\frac{186}{450} = 0,41$
856	—	356	—	$\frac{356}{856} = 0,41$

ainsi le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes. — Coulomb a reconnu que ce n'est qu'après un certain temps que le frottement a obtenu sa plus grande valeur, bois sur bois il faut plusieurs jours. pour les métaux très durs, le frottement prend sa valeur immédiatement. Coulomb a trouvé que le frottement était plus considérable suivant le fil du bois qu'en travers. — les enduits diminuent les frottements, en se plaçant dans les pores, ils rendent l'engrenage moins considérable — —

Lignier

Cours de Mécanique.

pour étudier le frottement à l'état de mouvement, après avoir chargé le traineau, il chargeait le plateau pour que le traineau fut emporté. — il observait le temps mis par le traineau à parcourir les deux 1ers pieds, et celui employé pour parcourir les deux derniers. (x) Le temps s'observait au moyen d'un pendule qui battait la demi-seconde — Si le mouv. était uniformément accéléré, on aurait

$$e = \frac{1}{2} g t^2$$

et en désignant par $t+t'$ le temps néc. pour parcourir un espace double, on aura

$$2e = \frac{1}{2} g (t+t')^2$$

d'où

$$\left(\frac{t+t'}{t}\right)^2 = 2$$

d'où

$$t = \frac{t'}{\sqrt{2}-1} = t'(\sqrt{2}+1)$$

$$t = t' \times 2,41 \text{ environ.}$$

Ainsi si le mouv. était unif. accéléré, on devait avoir cette relation entre t et t'. Coulomb a trouvé ce rapport à peu près : il y avait cependant des causes d'erreurs : ainsi l'unité de temps qui était l'erreur observée était comparable aux nombres de secondes pendant lesquelles se faisait l'expérience. (x) Ensuite le traineau ne parcourait qu'un trop petit espace; le frottement est plus grand au moment du départ que pendant le mouvement. Le traineau passait de la valeur maximum qu'il a au moment du départ, à la valeur minimum qu'il doit avoir pendant le mouvement. De sorte qu'il y avait de très grandes irrégularités, et le temps de l'expérience n'était pas assez considérable; aussi Coulomb a plutôt deviné la loi qu'il ne l'a démontrée —

(x) Le chemin total parcouru était de 6 pieds.

(x) Car le temps total était en général $\frac{10''}{2}$; $\frac{12''}{2}$; or une erreur de $\frac{1''}{2}$ sur un de ces nombres était très considérable.

92 v

voici le résultat obtenu par Coulomb —

traineau	plateau	t	t'
74	14	$\frac{7'}{2}$	$\frac{5'}{2}$
874 —	— 105 —	$\frac{6}{2}$	$\frac{3}{2}$
2474	270 —	$\frac{8}{2}$	$\frac{5}{2}$

les rapports sont loin de satisfaire à la loi trouvée
voici des expériences plus concluantes —
voici des nombres $t = \frac{3}{2}$. $t' = 1$

$t = \frac{8}{2}$ $t' = \frac{3}{2}$

il y a encore de grandes irrégularités — Coulomb a plutot devinée la loi qu'il ne l'a demontrée —

On admettra que le mouv. était unif. acceléré, il en résultait que le ~~mouvem~~ frottement était constant. —

Soient P le poids du plateau — N la réaction normale du plan —
T la tension du cordon.
Q. le poids du plateau
F le frottement

puisque le traineau (molecule du) decrivent des droites egales et parallel pendant chaque instant, soit Q la force qu'appliquée à chaque molecule lui donnerait le mouvement qu'elle a reellt; il est clair que mQ sera la force motrice, (de cette molecule) c'est à dire une force constante d'intensité et de direction; faisant la meme chose pour les autres molecules, appliquons à chaque molecule des forces mQ — mQ m'Q — m'Q qui se detruisent sur chaque molecule.
Mais les forces ~~motrices~~ mQ, m'Q donnerait encore le mouvement en etablissant la liaison du systeme. Donc il faut que les forces — mQ — m'Q se detruisent avec les

autres forces qui sollicitent le traîneau — ces forces sont
P, T, Q, F, N. ——
ces forces doivent se détruire comme si le corps était libre. —
~~La somme des composantes parallèles au plan devra être nulle~~.
les forces $-mq$ $-m'q$ se composent en une seule appliquée
au centre de gravité et égale à $-Mq$. — la somme des compos.
parallèles au plan devra être nulle; mais Q et N ne donnent
rien on aura donc

$$T = F + Mq$$

ou

$$T - F = Mq.$$

Mais $M = \frac{Q}{g}$ $\quad q = \frac{2e}{t^2}$.

$$T - F = \frac{Q}{g} \times \frac{2e}{t^2}$$

Si maint. on considère le mouv. du plateau, la force
qui détermine sa mouvement est $P - T$, et on
a

$$P - T = \frac{P}{g} \times \frac{2e}{t^2}.$$

Car le mouv. du plateau est le même que celui du
traîneau — au moy. de ces dernières équat., on
peut éliminer T. il vient

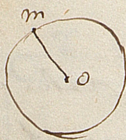
$$F = P - \frac{P+Q}{g} \times \frac{2e}{t^2}$$

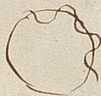
il résulte de là que le frottement est constant et
indépendant de la vitesse. —

La force $-Mq$ est appliquée au cent. de gravité.
Q est appliqué au centre gravité, on peut compos. ces 2
forces en une seule. ; maintenant ~~la force N et F~~. pour
chaque point la réaction du plan sur chaque molécule

du plateau

Ce experience a été repetée par M. Morin —
on ~~antepose~~ attache la corde à la lame antérieure d'un
dynamometre portant un pinceau imbibé d'encre. ce style était
vertical et pouvait laisser une trace sur un plateau circulaire
recouvert de papier et placé au dessus du dynam—. ce plateau
était emporté avec le traineau, et il tournait sur lui d'une
quantité proport. au chemin parcouru par le traineau.
et pour réaliser le mouvement l'axe du disque portait une
gorge sur laquelle s'enroulait une corde tendue aux deux
bouts du banc. le traineau poussant le disque devant lui, le
disque tournait proportionnellement au chemin parcouru
soit ~~M~~ le point du plateau qui est en regard du style
chaque point de la circonférence Om se presentera sous le pinc.
si la pression du dynamometre ne change pas, on aura un cercle
parfait; mais si la pression change, au lieu d'un cercle on a
une courbe comme à la figure. — en traçant ce cercle d'avance
et en voyant si le pinceau s'écartait plus ou moins —;
or ~~la pr~~ l'experience montre que la tension de la
corde est constante pendant le mouvement; il en resulte
que le frottement est indep. de la vitesse; la force qui
~~la pression mais à l'equation~~
determine le mouv. du plateau est P—T; c'est une
force constante; donc le mouvement du plateau est uniformement
accéléré. et par suite le mouv. du traineau est
uniformement accéléré.





Lignier

Cours de Mécanique

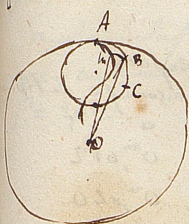
on a donc $T - F = \frac{Q}{g}\cdot\frac{2e}{t^2}$.

d'où $F = T - \frac{Q}{g}\cdot\frac{2e}{t^2}$.

Il restait donc à déterminer le rapport $\frac{2e}{t^2}$. — M. Morin a trouvé ce rapport indépendamment de ce qui précède; ce sera une vérification.

La poulie de renvoi sur laquelle passe la corde porte un plateau circulaire, qui décrit par sa périph. un chemin parcouru. En regard de ce plateau se trouve un style indépendant du plateau; ce style se meut par un mouv. d'horlogerie qui lui communique un mouv. uniforme de rotation. Supposons que le plateau ~~ne marche~~ de la poulie ne marche pas; alors le style décrira sur le plateau un cercle comme à la ~~poulie~~ figure. Supposons que le style décrive une circonférence en 1",8; divisons le cercle en 10 parties égales AB, BC etc; chaque partie sera parcourue en 0",18, puisque le cercle entier est décrit en 1",8.

Plateau Style Horloge



Mais en même temps le plateau de la poulie tourne; le style décrira une courbe ondulée que soit AME par exemple. [illegible] point OB, O étant le centre du plateau; de O comme centre avec OB pour rayon, décrivons un arc qui coupera la courbe AME au point M, le point B aura été reporté en M. — le plateau a donc tourné de l'angle BOM. or cet angle BOM pouvant être

relevé au ~~graphometre~~ rapporteur dans une experience et trouva que BOm = 6°,5; la poulie a donc tourné de 6°,5 pendant 0'',18 — de cette maniere on avait le temps a $\frac{1}{100}$ pres ~~on voit que la precision~~ etait beaucoup plus grande que dans l'experience de Coulomb —

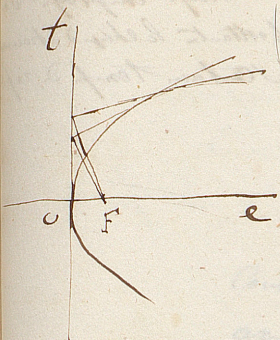
Cet angle BOm pouvait être relevé au rapporteur — cet angle BOm etait dans une experience 6°.30' — la poulie de renvoi a donc tourné de 6°,30'. — soit r le rayon de la poulie, le chemin decrit par la corde ou par le traineau sera $\frac{\pi r}{180} \times 6°,5$ — ; c'est la quantité dont un point de la corde a deroulé; on a donc ainsi le temps et l'espace les deux elements de la question —

tableau sur deux colonnes —

Parties de la circonference du style —	temps	degrés parcourus par le plateau —	espaces parcourus par le traineau
0,0	0	0	0
0,1	0'' 18	6°,5	0m,012
0,2	0'',36	20 5	0m,040.
0,3	0'',54 —	45°	0,089
0,4.	0'' 72	73°,5	0,142
0,5	0,90	120,5	0,233
0,6 —	1'',08	158,	—

la 2e colonne et la 4e donnent le temps et les espaces. —

D'après cela on pouvait construire la courbe des espaces en prenant le temps pour ordonnées et les espaces pour abscisses, et l'a reconnu que cette courbe etait une parabole — voici le moyen employé par M. Morin



et menant des tangentes à la courbe jusqu'à la rencontre de l'axe OF, et élevant des perpendiculaires à la tangente, ces tangentes venaient toutes se couper en un même point qui était le foyer de la parabole; et cette construction lui permettait de faire une correction — ; quelquefois le point F se trouvait un peu au dessus de l'axe Oe ; ceci montrait que les temps étaient tous trop grands d'une quantité constante, les temps évalués étaient tous trop grands d'une même quantité provenant de ce que le plateau ne se mettait pas en mouvement immédiatement à l'origine du temps. — ×

× alors il faisait passer l'axe par le point F, de cette manière l'origine des temps était bien déterminée. au lieu de la parabole $t^2 = 2pe$, on avait l'eq. $(t-t')^2 = 2pe$.

Supposons donc l'origine et l'axe de la parabole bien fixés; nous avons la relation.

$$F = T - \frac{\Phi}{g}\frac{2e}{t^2}.$$

dans cette equat. tout est connu; T est donné par le dynamometre, et $\frac{2e}{t^2}$ est l'inverse du parametre de la parabole — ; soit p le parametre, on a $\frac{2e}{t^2} = \frac{1}{p}$ p peut être mesuré, c'est l'ordonnée du foyer. ∴ donc

$$F = T - \frac{\Phi}{gp}. —$$

résultats numeriques —

Chene sur chene sans enduit —

$\Phi = 1039^k,03$

$T = 528^k,19$

$\frac{1}{p} = 0,361.$

d'après cela

$$F = 528,19 - \frac{1039,03 \times 0,361}{9,8088} = 489^k,95$$

donc rapp. du frott. à la pression $= \frac{F}{\Phi} = 0,471$ pendant toute la durée du mouvement

95 v

× depuis 40 k. jusqu'à 2800.

Les experiences ont été faites sur la plupart des corps employés dans les machines, en faisant varier l'étendue des surfaces frottantes, la charge d'un traineau

Frottement au depart et après un certain temps de repos

Surfaces	à sec	mouillés d'eau	huile	saindoux	suif	savon
bois sur bois	0,50	0,68		0,21	0,19	0,36
bois sur metal	0,60	0,65	0,10	0,12	–	
Cuirs sur bois sangles	0,63	0,87				
metaux sur metaux	0,18		0,12	0,10	0,11	

Ces nombres sont les valeurs du coefficient $f = \frac{F'}{\Phi}$.

Ce sont des valeurs moyennes – –

3

Frottement pendant le mouvement –

Surfaces	à sec	mouillés d'eau	huile	saindoux	suif
bois sur bois	0,36	0,25		0,07	–
bois sur metal	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08
metal sur metal	0,18		0,07	0,09	

Coulomb a depassé les charges etudiées par M. Morin; il a trouvé des nombres un peu plus grands que M. Morin –; le frottement est proportionnel à la pression –, il est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes –, et de la vitesse pendant le mouvement. ~~Le~~ Le frottement est plus grand au depart que pendant le mouvement.

96 a

Legnier

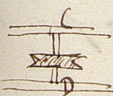
Cours de Mécanique —

Frottement de glissement circulaire

La loi du frottement des tourillons d'un cylindre sur les coussinets qui le soutiennent ainsi que la loi du frottement des axes de poulies ont été étudiés par Coulomb —

Coulomb avait pris une poulie embrassée par une corde soutenant deux poids. —

Supposons d'abord deux poids égaux P; la poulie portait un axe qui roulait dans une boîte de cuivre. Le système était soutenu par des traverses de bois. Si l'axe CD invariablement il y aura frottement de la boîte de la poulie sur l'axe; si au contraire CD est fixé à la poulie, il y a aura frottement de CD sur les coussinets qui supportent l'axe de la poulie —



Project. horizontale

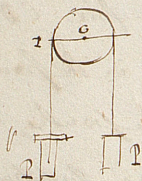
Pour déterminer le mouvement du système, il ajoutait un petit poids additionnel; il observait le temps nécessaire pour parcourir les 3 premiers pieds, et celui nécessaire pour parcourir les 3 derniers — il trouvait que le rapport des temps était $\sqrt{2}+1$, d'où il suit que le mouvement était uniformément accéléré. —

Or une partie du poids p était dépensée pour vaincre le frottement; donc le poids p devait être plus grand que celui nécessaire pour donner au système le même mouvement, en supposant le ~~mouvem~~ frottement détruit. —

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de frottement. soit Q le poids de la poulie $\frac{Q}{g}$ sera la masse, $\frac{Q}{g}k^2$ le moment d'inertie. Le mouvement de la poulie sera déterminé par l'équation

$$\frac{1}{g}\left\{Qk^2+(2P+p_1)c^2\right\}\frac{d\omega}{dt}=p_1 g c.$$

c étant le rayon de la poulie, et p_1 étant le poids qu'il faudrait mettre pour déterminer le mouvement du système, d'où $\omega=\frac{p_1 g c t}{Qk^2+(2P+p_1)}$; sans constante si l'on suppose la poulie partant du repos. —



Soit x la distance du poids p au plan horizontal qui passe par le centre de la poulie; on aura pour la vitesse du point I

$$\frac{dx}{dt}=c\omega$$

d'où $dx=c\omega dt=\frac{p_1 g c^2 t dt}{Qk^2+(2P+p_1)c^2}$.

intég. de $x=0$ a $x=h$ on aura

$$h=\frac{p_1 g c T^2}{2(Qk^2+(2P+p_1)c^2)}.$$ T étant le temps pour le poids descendre d'une hauteur h.

de cette équat. on peut tirer la valeur de p_1

$$p_1=\frac{2h\{Qk^2+2Pc^2\}}{gc^2T^2-2hc^2}$$

p_1 c'est le poids qu'il faudrait pour déterminer un mouvement assigné d'avance sans frottement

Mais Coulomb connaissant P qui donnait en tenant compte de toutes les forces le meme mouvement que precedemment. par conséquent P-P, sera la force dépensée par le frottement, et la raideur de la corde ; Coulomb connaissant h, T. (P-P,) etait donc connu : seulement il faut remarquer que cette force (P-P,) est appliquée au bras de levier CI, et comme c'est le frottement de l'axe dans la boite que nous cherchons, il faut voir ce que devient cette force quand on la suppose appliquée au bras de levier de l'axe. —

Le diametre de la poulie egal a 144 lignes. Le diametre de la boite etait de 20 lign 3/4, —. La force P-P, reduite au bras de levier de la boite sera $\frac{(P-P_1)144}{20+3/4}$ —. Ce nombre ne represente pas l'effet du seul frottement, il depend aussi de la force perdue par la raideur de la corde —. —.



De l'effet de la perte de force due a la raideur de la corde — L'experience montre que si une corde s'enroulant sur une poulie est tirée par deux forces verticales, au lieu de se detacher verticalement suivant la tangente, la corde s'ecarte de la tang. verticale du coté de la résistance ce qui augmente le bras de levier de la resistance au detriment de la ~~existance~~ puissance. Des experiences directes avaient permis à Coulomb de tenir compte des poids capable de plier la corde. voici les resultats

$P = 400$ liv. $p = 28$ $I = 8''$ $h = 6$ pieds $\varphi = 14$ liv.

$P_1 = 5'2$, alors $P - P_1 = 2$ liv. 8, represente le frottement et la raideur de la corde —

pour avoir le frottement dû à l'axe il faut retrancher de ce nombre la perte de poids due à la raideur de la corde. Cette perte était hors lors. en sorte que 19 livres était la perte due au frottement; la charge supportée par l'axe est 800 + 28 + 14 = 842; alors

$$\frac{19 \times 144}{20,75 \times 842} = \frac{1}{6}.$$

est le rapport du frottement à la pression. Ces expériences étaient faites sans enduit. — avec enduit de suif, le rapport est tombé à $\frac{1}{26}$. —

En résumé les lois du frottement de glissement rectiligne existent pour le frottement de glissement curviligne; seulement les rapports du frottement à la pression sont très faibles; cela montre que dans les expériences de M. Morin on pouvait négliger le frottement dû à la poulie de renvoi. Ce frottement étant très faible relativement au frottement du traîneau.

Dans les cabestans et treuils on emploie des axes creux [?]. il reste toujours un peu de jeu dans la boîte, en sorte que l'arête de contact peut occuper plusieurs positions. — Considérons une section perpendiculaire à l'axe du tourillon. Au départ le contact est en A le point le plus bas; mais quand le mouvement commence, l'axe s'élève en roulant comme sur une suite de plans inclinés qui seraient les plans tangents au cylindre, jusqu'à ce que le point de contact soit arrivé en un certain point m, tel que si on mène la normale ~~en~~ mo au coussinet, et la réaction mR, l'angle mOR soit précisément égal à l'angle de frottement; le tourillon alors cessera de monter; si l'angle de frottement cesserait [?] de monter, et le tourillon retomberait. La machine pourra garder un mouvement uniforme dans cette position, et l'angle MOA sera constant

Lignier

Cours de Mécanique

Supposons un corps pesant placé sur un plan horizontal. S'il n'y a pas de force active autre que la pesanteur, l'expérience montre que ce corps reste en repos sans avoir de mouvement de rotation, pourvu que la verticale passant par le centre de gravité passe dans l'intérieur du polygone d'appui ; or les réactions du plan peuvent se décomposer chacune en deux, une force normale, et une force tangentielle ; les forces normales se composent en une seule détruisant le poids du corps ; les réactions tangentielles se détruisent entre elles. —



Supposons que la verticale du centre de gravité passe en dehors du polygone d'appui. L'expérience montre que le corps fait la bascule autour d'une arête ab : dans ce mouvement on peut supposer que le mouvement se fait ~~tourne~~ autour d'un axe. Le moment du poids P sera P.IK ; I est le point où la verticale du centre de gravité rencontre le plan de la base ; IK est une perpendiculaire abaissée de I sur ab. Si on voulait retenir le corps, il faudrait lui appliquer des forces dont la somme des moments fût égale à P×IK. Si au contraire la verticale passe dans l'intérieur du polygone d'appui, il faudrait détruire le moment P×IK pour faire basculer le corps autour de l'arête ab. Ce moment est appelé moment de stabilité du corps. Plus ce moment sera grand, plus la force mouvante nécessaire pour le faire basculer devrait être considérable. — Le moment de stabilité dépend de l'arête que l'on considère. On choisit celle des arêtes pour laquelle le moment est minimum ; c'est ce moment-là qui est le moment de stabilité. —

Cas où le plan est incliné à l'horizon; — supposons un corps placé sur ce plan, ~~et retenu par~~ sollicité par une force Q. — quelle condition doivent être remplies pour que le mouvement soit uniforme? En chaque point d'appui du corps contre le plan, il y a une réaction oblique; les réactions obliques sont parallèles. elles donnent lieu à une résultante unique; il doit donc y avoir équilibre entre les forces P, Q, et la réact. du plan; donc les trois forces doivent être ~~égal~~ dans un même plan, et l'une d'elles égale et opposée à la résultante des deux autres. —

La force Q doit rencontrer la verticale P. Supp. que le plan BAC soit le plan qui contient la ligne de plus grande pente, et que la force Q soit contenue dans ce plan. — par le point C menons Cx parallèle à AB. soit $\theta = QCx$. nous regard. θ comme positif quand il sera compté au dessus de Cx; négatif quand il sera compté au dessous. la force Q se décomposera en deux. $Q\cos\theta$, $Q\sin\theta$ la force P en deux. $P\sin i$ $P\cos i$ la pression normale est $P\cos i - Q\sin\theta$.

le frottement sera $f(P\cos i - Q\sin\theta)$. —

si le corps est prêt à remonter on aura

$$Q\cos\theta - P\sin i = f(P\cos i - Q\sin\theta)$$

c'est l'équation de l'équilibre — si le corps était au moment de descendre, il faudrait changer le signe de f

on tire de là $\varphi = \frac{P \sin i + P f \cos i}{\cos \theta + f \sin \theta}$.

soit α l'angle de frottement pour le corps en contact, on

aura $\varphi = \frac{P \sin(\alpha + i)}{\cos(\theta - \alpha)}$

Cette équation a lieu dans le mouvement uniforme en remontant. — cette équat. convient au moment où l'équilibre va se rompre. il faut remarquer que si le corps est en mouvement, $f < \operatorname{tg} \alpha$, puisque le frottement pendant le mouv. est moindre qu'au moment du départ. alors il faudrait mettre à la place de f, la valeur de f observée quand le corps est en mouvement. —

Si $\alpha = 0$, le frottement est nulle, on a $\varphi = \frac{P \sin i}{\cos \theta}$. c'est la formule de statique.

revenons à la formule; on demande la direction de φ la plus favorable. il faut chercher la valeur de θ pour laquelle φ sera minimum, ou $\cos(\theta - \alpha)$ maximum; ce que donne $\theta = \alpha$.

Si le corps était prêt de descendre il faudrait prendre $\theta = -\alpha$

Si on donne la grandeur de φ, on peut se proposer de trouver θ. θ sera donné par un cosinus. à ce cosinus correspondent deux arcs égaux et de signe contraire, on aura $\theta - \alpha = \pm m$, d'où $\theta = \alpha \pm m$. Ceci montre qu'il y a deux directions suivant lesquelles on peut retenir le corps. — nous venons de trouver la force qui correspond au mouvement de remonte. pour avoir celle qui correspond au mouvement de descente il faut changer le signe de f ou de α; soit φ' cette force, on aura

99 v

$$Q' = \frac{P \sin(i-\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}$$

d'où $$\frac{Q'}{Q} = \frac{\sin(i-\alpha)\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\sin(i+\alpha)}.$$

Supposons que les fils soient parallèles au plan incliné, on aura $\theta = 0$ et $\frac{Q'}{Q} = \frac{\sin(i-\alpha)}{\sin(i+\alpha)}$, par suite $Q' < Q$.

Si $i = \alpha$, $Q' = 0$. Ceci veut dire qu'il y a équilibre entre le frottement et la composante parallèle du poids sans l'intervention d'une 3e force —

Si $i < \alpha$, la force Q' passe de l'autre côté de la verticale, l'angle qu'elle fait avec le plan, au lieu d'être θ est $\theta+2\alpha$.

Quel est le travail perdu par le frottement pendant la durée de remonte — soit ε le chemin parcouru par le corps. Le travail résistant utile sera $P\varepsilon\sin i$; le travail du frottement est $f(P\cos i - Q'\sin\theta)\varepsilon$.

remplaçant Q par sa valeur on a

$$\frac{P\varepsilon f\left(\cos i\cos(\theta-\alpha) - \sin\theta\sin(i+\alpha)\right)}{\cos(\theta-\alpha)} = T_f$$

c'est là le travail perdu. en simplifiant on trouve

$$T_f = \frac{P\varepsilon \sin\alpha\cos(i+\theta)}{\cos(\theta-\alpha)}.$$

Le rapport du travail perdu au travail utile est

$$\frac{T_f}{T_u} = \frac{\sin\alpha\cos(i+\theta)}{\cos(\theta-\alpha)\sin i}$$

Il est facile de voir dans quel cas cette fraction est $<$ ou > 1, dans le cas où $\alpha \leq i$ on trouve que la fraction est < 1 — mais pour des valeurs de α plus grandes cette fraction est > 1. —

Suppos. un traineau lancé sur la glace, on connait le poids du traineau, et on observe l'espace e parcouru. on peut mesurer le temps t du mouvement. Cela suffit pour.

Car soit φ l'accélération, P le poids du traineau ; soit V_0 la vitesse initiale on aura

$$V = V_0 + \varphi t$$

et

$$E = V_0 t + \frac{1}{2}\varphi t^2.$$

Mais la force motrice qui produirait le mouv. effectif est $\frac{P}{g}\varphi$; cette force est égale ici à la force de frottement ~~[illegible]~~ on a $\frac{P}{g}\varphi = -fP$, c'est l'équat. que nous avions précédemment —

$$V = V_0 - fgt.$$

$$E = V_0 t - \frac{1}{2} fgt^2$$

le traineau s'arrête au bout d'un temps T ; à ce moment $V=0$ d'où $T = \frac{V_0}{fg}$; éliminons V_0 qui est inconnue il vient $E = \frac{1}{2} fgT.$ d'où $f = \frac{2E}{gT^2}$

Si on supposait $\iota < \alpha$, φ serait negatif, ceci veut dire que le mouv. serait uniformement retardé.

Soit v_0 la vitesse initiale qu'elle suppose imprimée au corps : au bout du temps t on aura

$$v = v_0 + \varphi t = v_0 + \frac{g \sin(\iota - \alpha)}{\cos \alpha} . t$$

$$E = v_0 t + \frac{1}{2} \varphi t^2 = t\left(\frac{v_0 + v_0 + \varphi t}{2}\right)$$

$$= \frac{t(v + v_0)}{2}$$

Mais $t = \frac{v - v_0}{\varphi}$. donc

$$E = \frac{v^2 - v_0^2}{2\varphi}$$

Multip. des deux cotés par M il vient.

$$2M\varphi . E = M(v^2 - v_0^2)$$

Donc l'accroissement de force vive en passant d'une position à une autre est egale au double du travail produit. —

Cas d'un corps abandonné à lui même. Le corps glissera sur le plan — la molécule decrirait des droites egal de compo P en deux forces — P cos i normale, et P sin i — le frottement est f P cos i; il agit en sens inverse du mouvement. — on a vu que si φ represente l'acceleration, M la masse du corps, si on applique à chaque molecule une force egale ~~et~~ contraire à celle qui lui

du
il y aura equilibre entre les forces la et les forces appliquées. les forces se composent à une seule Mφ appliquée au centre de gravité du corps; donc il doit y avoir à chaque instant entre Mφ, P, et R; R est la reaction du plan; la somme des projections sur AD sera nulle; donc on aura

$$M\varphi + fP\cos i - P\sin i = 0.$$

d'où $$\varphi = \frac{P(\sin i - f\cos i)}{M}$$

$$\varphi = g(\sin i - f\cos i) \quad \text{car } P = \frac{M}{g}.$$

$$\varphi = g\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha} \quad \text{en posant } f = \operatorname{tg}\alpha.$$

le mouv. ne sera jamais uniforme à moins qu'on n'ait $i=\alpha$. Sans cela le mouv. sera uniformement acceléré; ceci justifie l'experience de Galilée.



Nous avons trouvé la formule

$$(1)\quad Q = \frac{P \sin(i+\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)}$$

Soit E le chemin décrit par le corps pesant en montant. — le travail moteur est $QE\cos\theta$ — le travail utile est $PE\sin i$ —

multipl. (1) par $E\cos\theta$, il viendra

$$QE\cos\theta = PE\sin i \,\frac{\sin(i+\alpha)\cos\theta}{\sin i \cos(\theta-\alpha)}$$

$$= PE\sin i\left\{1 + \frac{\sin\alpha\cos(i+\theta)}{\sin i\cos(\theta-\alpha)}\right\}$$

soit T_u —

on tire de là

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{1}{1 + \dfrac{\sin\alpha\cos(i+\theta)}{\sin i\cos(\theta-\alpha)}}$$

Ce rapport est toujours < 1, ce qu'on savait. C'est ce qu'on appelle le rendement d'une machine; une machine est d'autant meilleure que ce rapport approche plus de 1 —

Considérons maintenant une poulie. Il faudra supposer $R = r$; supp. de plus que les deux forces P et φ soient verticales — il viendra

$$P = \varphi + \rho \sin\alpha$$

on déduit de là la valeur P.

$$P = \frac{\varphi(r + \rho\sin\alpha) + V\rho\sin\alpha}{r - \rho\sin\alpha}$$

c'est la valeur de P dans le mouv. uniforme — on peut écrire

$$P = \varphi\left(1 + \frac{2\rho\sin\alpha}{r - \rho\sin\alpha}\right) + V\rho\sin\alpha.$$

$$P = \varphi + \varphi\rho\sin\alpha\left(2 + \frac{V}{g}\right)$$

Soit Σ le chemin décrit par un point de la circonférence de la poulie; en multipl. les deux membres par Σ.

il vient $P\Sigma =$ —

d'où $\dfrac{\varphi\Sigma}{P\Sigma} = \dfrac{1}{\quad}$

La perte occasionnée par le frott. des poulies est peu considérable; en voici la preuve —

poulie mobile —

103v

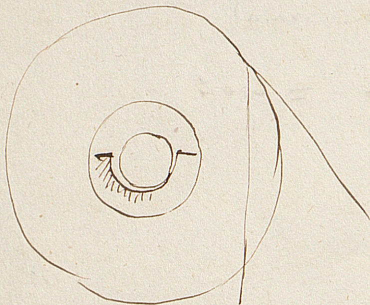
Un traineau armé de patins polis a été lancé sur la glace — il a parcouru un espace $E = 20,4$ pendant un temps $T = 10'',2$ — on aura

$$f = \frac{2 \times 20,4}{\quad} = 0,04$$

Raideur des cordes ; la force nécessaire pour plier une corde sur une poulie est en raison directe de la tension ; en raison inverse du rayon de la poulie —

Tour —

Suppos. une coupe verticale



le tourillon monte jusqu'à

Soit R_1 la réact. exercée par le coussinet sur le tourillon nous la regardons comme appliquée au milieu de l'arête de contact du tourillon sur le coussinet. — Soit α l'angle de frottement. $R_1 m O$ — soit λ —

écrivons qu'il y a équilibre entre les forces qui sollicitent la machine : ces forces sont P, Q, le poids de la machine V, et la réaction R_1 ; les réact. R_1 R_2 ne sont pas égales ; car la force P n'est pas au milieu —

l'angle de frottement

écrivons les équat. d'équilibre qui nous sont nécessaire --

pren l'axe du cylindre pour axe des x; la verticale pour axe des Z. et oy --

parallèlement à l'axe des x, P, Q, V ne donnent rien; -- donc les compos. des react. parallel à l'axe des x ont une somme nulle --

écrivons que les compos. suivant la verticale est une somme nulle -- on aura

$$P \cos\gamma + Q \cos\beta - (R_1 + R_2) \cos(\lambda - \alpha) + V = 0$$

on met le signe - devant

parallèlement à l'axe oy on aura

$$P \sin\gamma - Q \sin\beta - (R_1 + R_2) \sin(\lambda - \alpha) = 0.$$

écrivons que la somme des moments perpend. à l'axe est nulle -- on aura

$$PR - Qr - (R_1 + R_2) r \sin\alpha$$

105 v

Ces trois equat. suffisent pour determiner le mouvement.

on tire de ces equat.

$$R_1 + R_2 = \sqrt{(P\cos\gamma + Q\cos\beta)^2 + (P\sin\gamma - Q\sin\beta)^2}.$$

L'equat. de l'equilibre est

$$PR - Qr = f\sin\alpha\sqrt{}$$

Si on demande de determiner P. de telle sorte que l'equilibre existe

107v

Conférence de M. Bertrand

Géométrie Descriptive

Soient deux plans MN, MP; le plan MN étant horizontal, les lignes menées dans le plan MP sont dites de plus grande pente, si elles font avec le plan MN le plus grand angle possible; je d

Soit AB une ligne de plus grande pente; je dis que AB est perpendiculaire à l'horizontale AM.

Car soit BM une oblique à AM. J'abaisse BC perpend. sur MN. Je tire CA, BM. Les deux triangles BCM, BCA sont rectangles et ont BC commun. De plus on a BM > BA par hypothèse. Donc l'angle CMB < que l'angle CAB. Donc l'angle CAB est maximum.

Ainsi donc dans un plan donné les lignes de plus grande pente sont perpendiculaires aux horizontales.

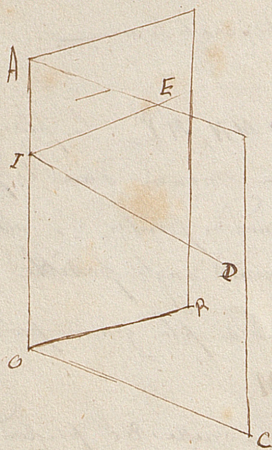
Quand des deux côtés d'un angle droit l'un est horizontal, la projection horizontale de cet angle est aussi un angle droit.

Soit MPN un angle droit, dont le côté PN est horizontal. Soit M'P'N' la projection de cet angle.

~~le plan MPP' est vertical~~

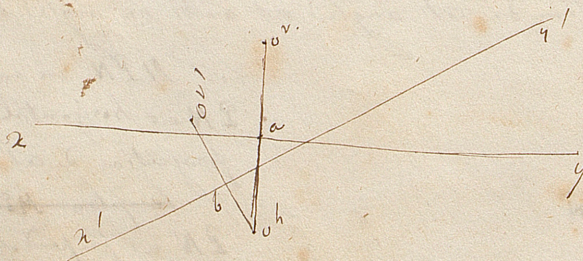
PN est perpend. à PM; mais PN est aussi perpendiculaire à PP', puisque PP' est une verticale; donc PN est perpendiculaire au plan MPP'. Donc P'N' parallèle à PN est perpendiculaire au plan MPP', et partant à P'M'. Donc l'angle M'P'N' est un angle droit.

C'est le seul cas où cela puisse avoir lieu.

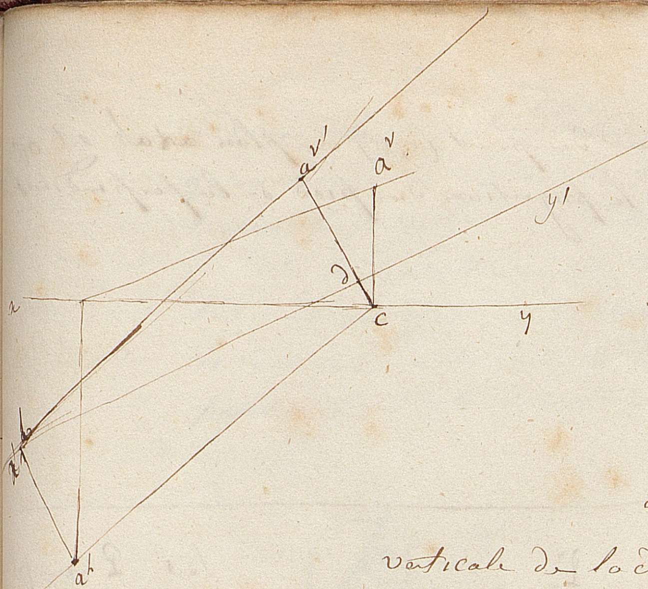


Soient deux plans verticaux AB, AC.
Soit une droite quelconque ID dans le plan AC.
pour avoir une droite qui fasse avec ID un angle droit, et qui soit située dans le plan AB je mène par le point I un plan perpendiculaire à ID, soit IE l'intersection de ce plan avec AB je dis que IE est perpend. à AI. Car le plan mené est perpendiculaire à AC. donc IE intersection de deux plans perpend. à IC, est perpend. à ce plan, et par suite est horizontal, la projection horizontale de cet angle est l'angle droit COB.

Changement de plans de projection.

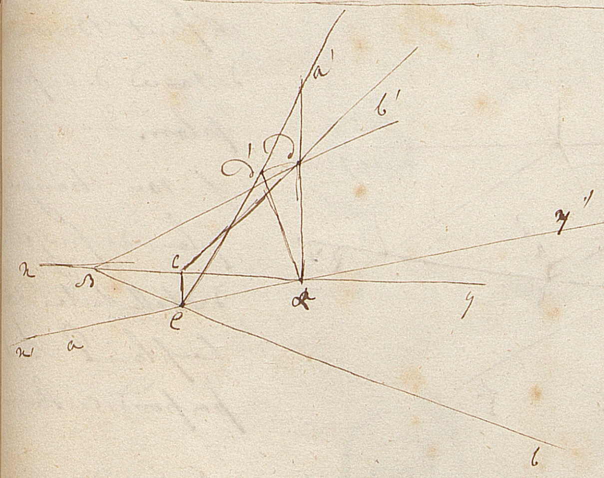


Soit o^h et o^v les deux projections d'un point ; au lieu de prendre xy pour ligne de terre, prenons x'y' que deviendront les projections du point. — Si de o^h j'abaisse $o^{v'}$ perpend. sur x'y', si je prends $bo^{v'} = ao^v$, les points o^h et $o^{v'}$ seront les nouvelles projections.



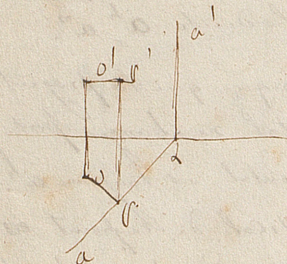
la ligne de terre devenant $x'y'$ qui deviennent la projection de la droite a^h, a^v.

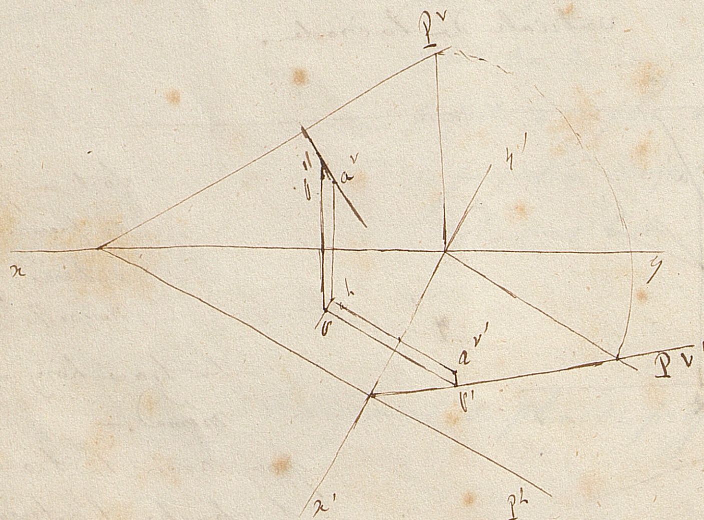
Je remarque que la projection horizontal ne change pas. la trace horizontale est toujours a^h. la projection verticale de ce point est b. j'abaisse cd perpend. sur $x'y'$; soit $da^{v'} = ca^v$. alors $ba^{v'}$ est la projection verticale de la droite.



Soit un plan $b\beta b'$. en prenant $x'y'$ pour ligne de terre, quelles sont les nouvelles traces du plan. la trace horizontale est la même. — pour avoir la trace verticale je cherche l'intersection du plan donné, avec le nouveau plan vertical $a\alpha a'$. les projections de cette intersection sont $a\alpha$ et cd. les traces de cette droite sont d et e. le point d se rabattera sur ~~vant~~ d'. $\alpha d'$ est perpend. à $x'y'$ et de plus $\alpha d' = \alpha d$. les traces du plan sont donc alors eb et ed'.

Je. La distance du point (o, o') au plan αdα' est op. pp' sont les projections du pied de la perpendiculaire.



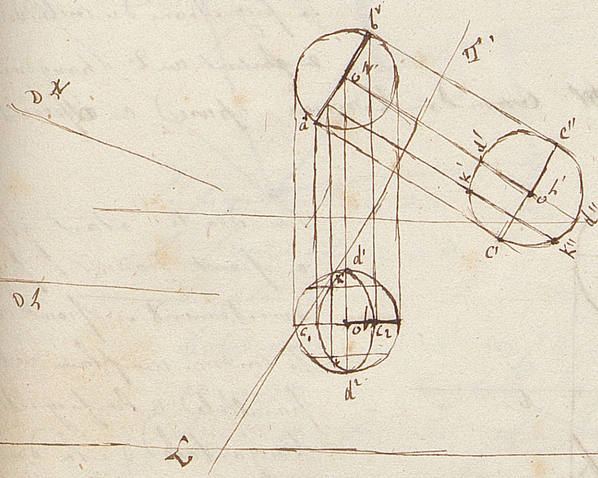


Soit P un plan soit a un point. il faut trouver la distance de ce point au plan.

Je vais changer les plans de projection de telle sorte que le plan P soit perpendiculaire à l'un deux. pour cela, je prends pour ligne de terre x'y' perpendiculaire à Ph. la trace verticale du plan est Pv'. la projection verticale du point est a''. la distance est donc p'a''. et le pied de la perpend. dans le nouveau système est ~~est~~ (o, o'). ; dans l'ancien, les projections sont p et p'.

on donne la projection d'une sphère et d'une droite, on suppose qu'on mène à la sphère des tangentes parallèles à la droite donnée. trouver la projection du cercle de contact de la courbe avec le cylindre.

Si la droite donnée est perpend. au plan horizontal, la projection hor. se réduit au grand cercle ~~projetant~~ égal à la projection de la sphère, et la projection verticale, est une droite parallèle à la ligne de terre et passant par le centre du cercle qui projette la sphère sur le plan vertical.



Supposons que la droite donnée (D^v, D^h) soit parallèle au plan vertical. soient o^v et o^h les projection du centre de la

je prends pour plan horizontal un plan perpendiculaire à la droite donnée; je prends donc L'T' perpend à DV. la projection verticale sera dans le système $a^v b^v$ et la projection horizontale sera le cercle o^h! revenant au 1er système la projection verticale ne changera pas. je construis les points de la projection horizontale.

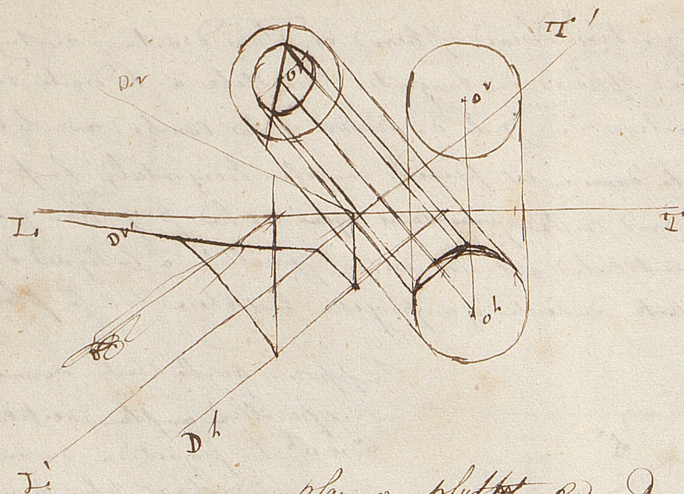
on peut construire les projections directement d'une manière assez simple

je coupe la sphère par un plan parallèle au plan vertical. soit $a^h b^h$ l'intersect. de ce plan avec le pl. hory. le ~~projection vertic~~ cercle d'intersection du plan mené, et de la sphère, se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical; ce sera un cercle dont le diamètre sera égal à $a^h b^h$. je mène par le centre de la sphère un plan perpend. à la droite donnée soit cd son intersection avec le plan verticale; je ~~dis que~~ les points o et m sont les projection

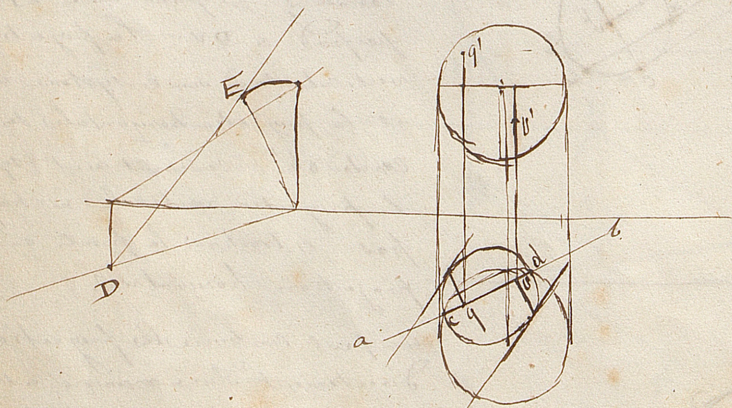


verticales de deux points de contact, car pour qu'une droite soit tang. à la sphère il suffit qu'elle soit tangente à un cercle tracé sur la sphère. La projection horizont. sont facile à trouver. et —

110v

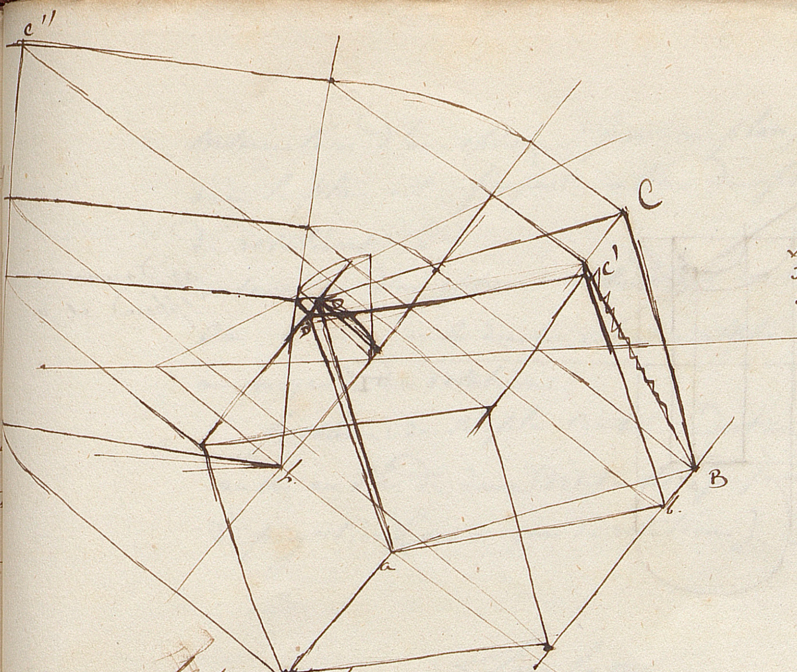


La droite donnée est quelconque. Dv et Dh sont les deux projections. Je prends un plan vertical parallèle à la droite donnée, soit L'T' parallèle à Dh pour nouvelle ligne de terre. Je chercherai comme précédemment la projection du cercle de contact en faisant un 2e changement de plan, ou plutôt comme dans la dernière épure, en opérant directement.



La droite étant qlq. on peut trouver la project. directement. Pour cela je conduis un plan vertical parallèle à la projection horizontale de la droite soit ab sa trace horizontale le diamètre du cercle intercepté sera égal à cd.

Je suppose que je fais tourner le cercle intercepté autour du diamètre parallèle au plan horizontal, jusqu'à ce que le plan de ce cercle devienne horizontal. Ce cercle se projettera en vraie grandeur sur le plan horizontal. Je rabats aussi la droite, elle se rabat suivant DE, si je mène au cercle rabattu des tang. parallèles à la droite rabattue, j'aurai les ~~rabattement~~ projection des points de contacts du cercle intercepté avec les tangentes menées dans l'espace parallèlement à la droite donnée, quand le cercle est parallèle au plan horizontal. Si le cercle se relève, les projection horizontales seront p et q. Les projections verticales sont p' et q'.



x est situé dans le plan donné.

On donne la projection horizontale d'une droite. Cette droite passe au point a^x. Construire la projection d'un carré dont cette droite est le côté, et celle d'un cube dont le carré est la base.

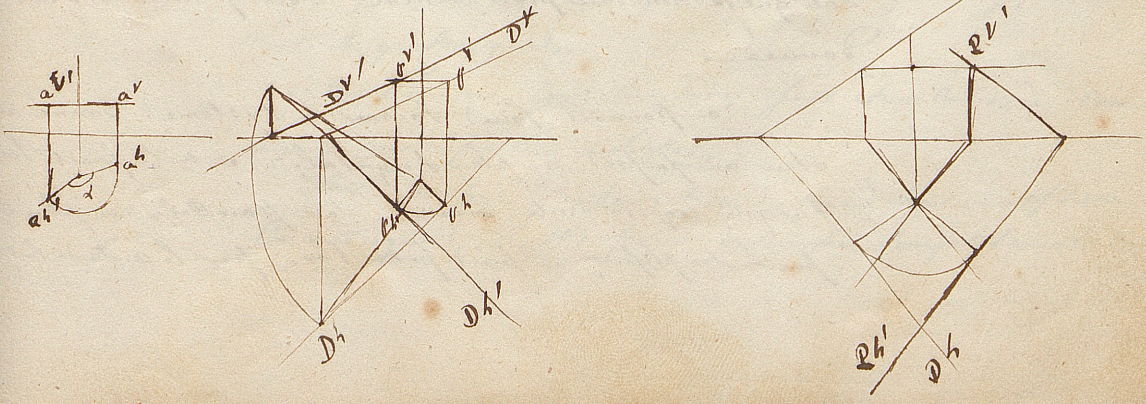
Je prends un plan vertical perpendiculaire au plan donné et je rabats la droite dont la projection est ab sur le plan horizontal. Sur la droite aB, ~~rabattue~~ j'y construis le carré ABCD.

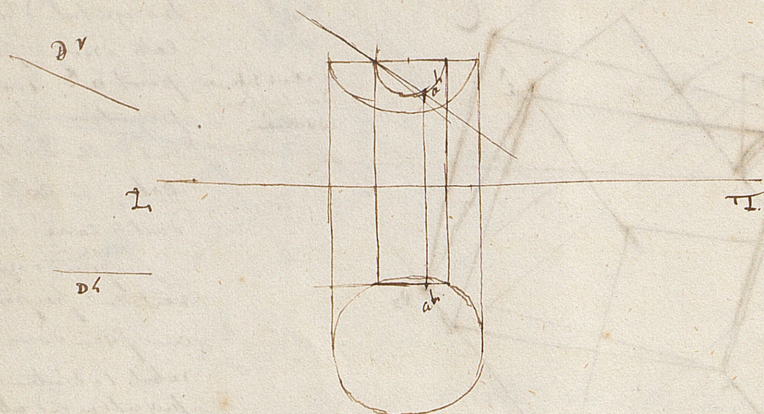
La projection horizontale du carré est abC'D'. Je prends gh = aB. Je remarque que les arêtes du cube sont perpendiculaires au plan donné; leurs projections horizontales sont donc perpend. à la trace horizontale du plan. De plus je remarque que ces arêtes se projettent en vraie grandeur sur le 2e plan vertical. Et la projection horizontale trouvée, il est facile de trouver la projection verticale.

Rotation

Faire tourner un point autour d'un axe vertical.
Faire tourner une droite — id
Faire tourner un plan — id id

Mêmes questions autour d'un axe parallèle à l'un des plans de projection.





on donne une sphère et un

on donne un cylindre ayant pour base le cercle horyontal, et le generatrice parallele a la droite (D^h, D^v); (a^v, a^h) est un point du lieu.

La projection verticale de l'intersection de la sphère et du cylindre, est une ligne droite passant par le centre, donc la courbe d'intersection est plane; c'est un ~~grand~~ cercle de la sphère.

maintenant supposons que la direction des generatrice soit quelconque; dans ce cas je changerai de plan de telle sorte que le nouveau plan vertical soit parallele a la direction donnée.

on pourrait faire tourner le systeme donné autour d'un axe perpend. au plan horyontal; et on le ferait tourner jusqu'a ceque la droite donnée soit parallele au plan vertical pour simplifier, on ferait passer l'axe par le centre de la sphère.

intersection d'une sphere par un plan; ramener ce cas, a celui ou le plan est perpend. a l'un des plans de projection, au moyen de rotations.

intersection d'une sphere et d'une droite quelconque: ramener ce cas a celui ou la droite est parallele à l'un des plans de projection, au moyen de rotations.

probleme de la plus courte distance, de deux droites, ramené au cas ou l'une des deux droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection; (au moyen de rotations). — —

Surfaces —

On appelle surface cylindrique, une surface engendree par le mouvement d'une droite qui restant parallele a une direction fixe, par une courbe donnée.

Un cylindre etant donné, la directrice n'est pas determinée car si sur le cylindre on trace une courbe quelconque, on pourra la considerer comme la base du cylindre;

la section droite du cylindre est la section de ce cylindre par un plan perpend. aux génératrices; cette section droite suffit complètement pour déterminer le cylindre.

Une surface conique est une surface engendree par une droite qui passe par un point fixe, et qui s'appuie sur une courbe quelconque.

Un même cone, comme un cylindre, peut être considéré comme ayant une infinité de bases.

La courbe d'intersection du cone par une sphere concentrique, suffit pour determiner completement le cone.

Les courbes sont semblables quand le rayon varie; prenons donc une sphère de rayon 1; et je suppose que les deux cones donnent la même courbe. Je transporte les deux cones l'un sur l'autre et je fais coïncider les deux courbes, qui par hypothèse sont égales. Les deux sommets se confondront donc

On appelle surface de revolution, une surface engendrée par une courbe qui tourne autour de l'axe, de telle sorte que chacun de ses points décrive un cercle dont le centre est le pied de la perpend. abaissée du point sur l'axe. Ce qui caractérise les surfaces, c'est que les sections faites perpendiculairement à l'axe sont des cercles.

On a une surface et une droite AB telle que toute section perpend. à AB, soit un cercle ayant son centre sur AB, cette surface sera de revolution. Je trace sur la surface une courbe qlq. AmmʹB. Par un point quelc. de la courbe m, je mène un plan perpend. à l'axe. Soit o le point de rencontre de l'axe et de ce plan; c'est évident que le point m considéré décrira un cercle de rayon om, et ne quittera pas la surface. donc



X ne peut rejoindre la surface considérée comme engendrée par la ligne AmmʹB tournant autour de AB. donc c'est bien une surface de révolution

Une même surface de revolution peut être engendrée par une infinité de courbes. Pour qu'une courbe puisse être génératrice, il faut qu'elle rencontre tous les cercles perpendiculaires à l'axe AB; parmi les courbes il y en a une qui peut servir de définition; c'est la courbe méridienne, c'est à dire la courbe d'intersection de la surface par un plan passant par l'axe.

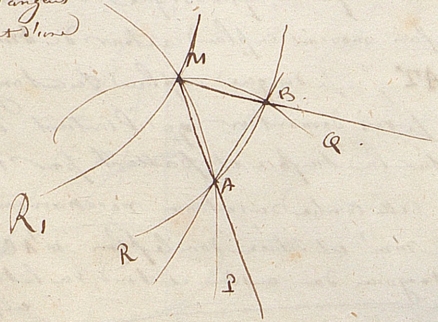
Surfaces réglées, c'est une surface engendrée par une ligne droite, quelle que soit la loi suivant laquelle cette droite se meut.

Les surfaces réglées peuvent aussi être des surfaces de révolution. Elles se partagent en 2 classes, distinguées par une propriété du plan tangent. Je suppose que AB soit une génératrice. Si le plan tangent est le même pour tous les points de la génératrice, on aura des surfaces développables.

Si le plan tangent varie d'un point à l'autre de la génératrice, on a ce qu'on appelle des surfaces gauches.

On entend par plan tang. en un point, un plan qui contient les tangentes à toutes les courbes qu'on peut tracer sur la courbe par ce point. × Soient deux courbes MP, MQ, soit une troisième courbe R, qui coupe les deux premières aux points A et B.

× cet énoncé est en même temps un théorème, car il faut démontrer qu'il existe un plan tangent en chaque point d'une surface.



Je considère une troisième courbe ~~[illegible]~~ je pourrai faire rapprocher la courbe R du point M, en modifiant sa forme bien entendu. Je joins MA, MB, MC. Ces trois droites sont dans un même plan; donc leurs limites sont dans un même plan; or les lignes MB, MA, ont pour limite l'une la tangente à la courbe MQ au point M, l'autre la tangente à la courbe MP au point A. Quant à la courbe R, les points A, B se rapprochent de plus en plus; quand ces deux points seront très près, la droite AB sera très près d'être tangente, et à la limite elle sera tangente.

Voici ce qui n'est pas rigoureux, quoique une droite réunisse deux points voisins qui tendent l'un vers l'autre, elle peut fort bien ne pas devenir la tangente à la limite comme si la courbe avait un point de rebroussement; cependant le théorème a lieu généralement; en chaque point d'une surface, il existe généralement un plan tangent.

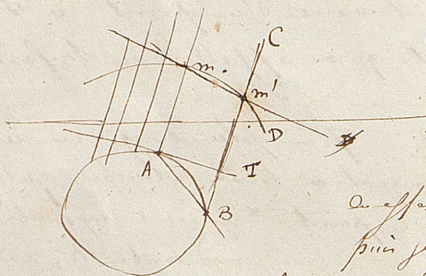
113r

si a cette surface et un point sur elle, pour determiner le plan tang. en ce point, on fera passer deux courbes par ce point; on y menera des tangentes à chacune de ces courbes; et ces deux tangentes determineront le plan tangent.

Cylindre.

Soit un cylindre, soit un point M.

Le plan tang. au point M, est tangent le long de la à toute la generatrice et contient cette generatrice. Je suppose que la generatrice rencontre la directrice au point A au point A je mene AT, tangente à la courbe directrice, je dis que le plan M'AT sera tangent en effet par A, je mene AB dans le plan de la directrice, puis je fais passer un plan suivant M'A et AB.



ce plan coupera la surface cylindrique suivant BC parallele à Am', si je fais mouvoir ce plan autour de Am', jusqu'à ce que AB se confonde avec AT, je dis que ce plan sera tang. au cylindre au point m; et pour cela, je vais demontrer qu'il contient toutes les tang. menées aux courbes tracées sur la surface et passant par le point m.

Soit m'D une de ces courbes. cette courbe rencontrera necessairement la generatrice BC en un point m. et la droite mm' est située dans le plan m'AB; quand m'AB, tend vers m'AT, mm' est toujours dans ce plan et tend vers la tang. à la courbe au point m. donc etc

Corollaire, un cylindre etant donné, on peut toujours lui circonscrire un prisme.

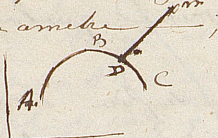
on dit aussi que le cylindre est l'enveloppe des positions d'un plan qui se meut en restant parallele à une direction donnee.

toutes les surfaces peuvent être considerées comme des enveloppes de positions d'un plan.

ainsi la surface de la sphère est l'enveloppe des plans qui sont à une distance constante d'un point donné

!

Le plan tangent au cylindre est déterminé par un seul paramètre; ~~car [illegible] la surface du cylindre par un plan quelconque, soit ABC la courbe d'intersection, [illegible] point sur ABC la courbe d'intersection, je connais le point m, il suffit de donner l'abscisse [illegible] de ce point.~~

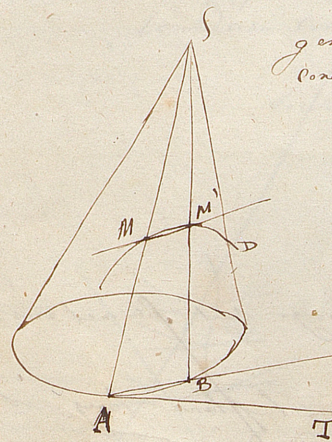


Il suffit que si l'on veuille mener un plan tangent au point m, je coupe le cylindre par un plan qlq. soit ABC la courbe d'intersection. Je peux regarder cette courbe comme la base du cylindre; maintenant ~~Le plan tangent à la sphère est déterminé par deux paramètres arbitraires [illegible]~~ par le point m, je mène une parallèle aux génératrices, soit mD, cette génératrice, et soit D le point où elle rencontre ABC, il suffit évidemment de connaître le point D; or comme ce point est sur la courbe ABC, il suffit d'avoir l'une de ses coordonnées; dans un cylindre une seule condit. suffit pour déterminer le plan tangent.

Si on a une sphère si on veut mener un plan tangent en un point pris sur la surface de cette sphère, pour déterminer ce point il faudra connaître deux de ses coordonnées; car un point étant situé sur une surface, si l'on connaît deux de ses coordonnées, la troisième est connue. dans une surface qlq. il faut 2 condit. pour déterminer le plan tangent.

Surfaces coniques

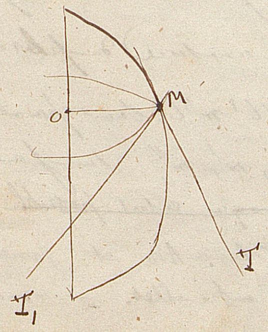
Pour mener un plan tang. au point M, je mène la génératrice SMA; par A, je mène AT tangente à la base du cône; je dis que le plan SAT est le plan cherché. Soit SAB un autre plan qui coupe le cône suivant SB; je fais mouvoir le plan SAB autour de SA, jusqu'à ce que AB coïncide avec AT. Je dis que ce plan SAT contient toutes les tangentes aux courbes tracées sur le cône et passant par le point M. Soit soit MD une courbe, elle rencontre SB en un point M'. quand SAB tend vers SAT, MM' qui est toujours située dans le plan SAB, tend vers la tangente à la courbe MD. donc le plan tang. au point M est tangent en tous les points de la génératrice qui passe en M, et contient cette génératrice.



Surfaces de révolution.

Le plan tang. doit contenir la tang. au méridien qui passe en M et la tang. au parallèle.

Ce plan est donc perpend. au plan méridien qui passe en M.



MT, est perpend. à OM, et est dans le plan du parallèle. MT, est aussi perpend. à ce plan à l'axe, donc elle est perpend. au plan méridien; donc TMT' est perpend. au plan méridien

Cette propriété est la même que la suivante.

on peut dire une normale à une surface de revolution rencontre l'axe, car le plan meridien ~~étant~~ est perpendiculaire au plan tang., la normale est située dans le plan meridien. donc. etc.

cette propriété est la même que l'autre; car si on suppose ceci demontré on en deduit la première.

on a donc deux moyens pour mener un plan tang. à une surface de revolution —

~~La propriété du plan tang. sert caracteristique de la surface —~~

~~toute surface dont tous les plans tang. sont parallels à une même droite est un cylindre; une pareille surface doit avoir un même plan tang. à une infinité de points differents, ~~et~~ ceux-ci sont le long d'une meme ligne.~~

~~Je coupe la surface par une serie de plans parallels entre eux.~~

(1) je suppose que les points m, m', m'' sont choisis de telle maniere que cela arrive.

B

A



~~les tang. mt, m't', m''t'', sont parallels, et les plans tang. en m, m', m'', sont parallels entre eux; ~~je le suppose que cela soit possible~~ (1) — car ils sont tous parallels à AB et passent par des tangentes parallels entre elles. — maintenant je dis tous ces plans parallels coincident.~~

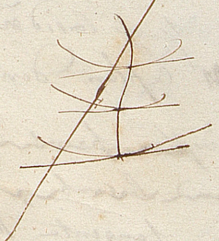
1o. 2

la courbe des points de contact. les different tang. doivent etre parallel. à un plan fixe, parallele en meme temps à AB et à mt. donc elles se projettent parallelement entre elles sur un plan perpend. à ce plan fixe. or les tangents à une courbe se projettent suivant ~~donc cette courbe est plane~~ — ~~je prends le plan fixe pour plan horizontal~~ une droite qui est tang. à la projection de la courbe. or il est impossible qu'une courbe ait toutes ses tangents parallels, donc la courbe se projettera suivant une droite sur un plan convenablement choisi. donc la ~~proj~~ ~~courbe~~ ~~est~~ ~~plane~~ courbe est plane. &c —

~~quand~~ un plan enveloppe ~~des~~ positions d'un plan, peut etre consideree comme les intersections successives des portions de ce plan.

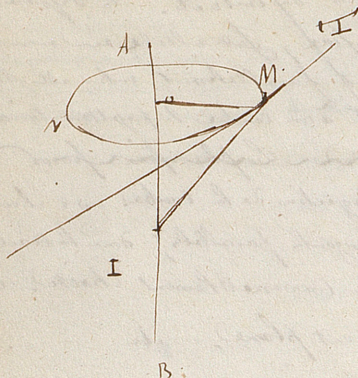
1o. 2e ~~surface~~

je coupe la surface par une serie de plans parallel. je prends une serie de ~~paralle~~ tang. parallel. entre elles.



Les surfaces dont les normales rencontrent une droite fixe sont de révolution.

Par M je mène un plan perpend. à AB.



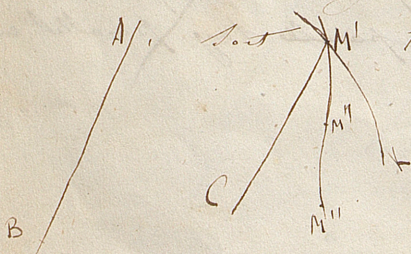
La courbe d'intersection sera un cercle; soit MI la normale, et MT la tang. en M, MT sera perpendiculaire à MI; mais MT étant dans un plan perpendiculaire à l'axe, est perpend. à cet axe; donc MT est perpendiculaire au plan MIO, (soit O le point où le plan MN coupe l'axe.). MT étant perpend. au plan MIO, est perpendi à OM. donc OM est une normale ~~passant~~ qui coupe l'axe au point O; il en serait de même des autres normales de la courbe MN. donc cette courbe est un cercle.

L'éq. d'une normale est $y-y' = -\frac{dx'}{dy'}(x-x')$. si on veut que cette normale passe constamment par un même point que je supposerai l'origine, on aura $y' = -\frac{dx'}{dy'}x'$ ou $y'dy' + x'dx' = 0$.

d'où $x'^2+y'^2 = C$. donc etc

Demonstration relative au cylindre

Je coupe la surface par un plan parallèle à AB.



1° courbe d'intersection 1. je considère le plan tangent au point M' ce plan devra contenir la ~~le plan tang. au [illegible]~~ tangente M'T, et la ligne M'C parallèle à AB; donc le plan tangent au point M est le plan même de la courbe. Ceci fait voir que l'intersection ne peut être une courbe. car si par le point M' je menais un autre plan sécant parallèle à AB, on démontrerait de la même manière que le plan tang. au point M' est le plan de la courbe M'K. donc, une surface pourrait avoir en tous ses points une infinité de plans tang. car le point M' est quelconque. L'intersection est donc une droite

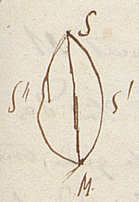


~~soit MC cette droite. le plan tang. au point M devra contenir la droite MC et la droite~~. on prouverait comme précédemment par

l'absurde que si on mène par le point M plusieurs plans parallèles à AB les intersections de ces plans ~~se réduiront toutes~~ avec la surface se réduisent à une même droite parallèle à AB et passant par le point M; qui est l'intersection commune de tous ces plans. ainsi donc on peut regarder la surface comme engendrée par une droite qui se meut parallèlement à elle même

Toute surface dont les plans tangents passent par un même point est un cone.

Soit S le sommet du cone. par le sommet je mène un plan sécant, soit SS'M la courbe d'intersection. le plan sécant doit contenir SM et la tang. en M à la courbe SS'M. donc ce plan sécant se confond avec le plan tangent au point M. on voit que le plan tangent est le même dans tous les points de



l'intersection. si je menais par le point S et par le point M un autre plan, si on suppose que SS''M soit la courbe d'intersection on verrait que en un point quelconque de la surface du cone on pourrait mener une infinité de plans tangents. donc tous les plans qui passent en S et M coupent ~~le cone~~ surface suivant une même droite SM donc etc —

Surfaces réglées.

Le caractère d'une pareille surface est d'admettre des generatrices rectilignes, de telle sorte qu'en chaque point de la surface, on peut faire passer une droite qui soit contenue entière dans la surface —

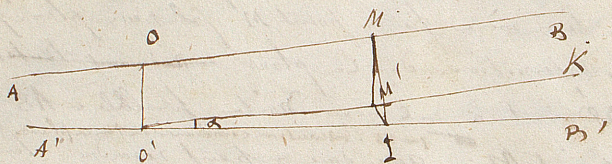
Soit AB une génératrice. voyons la variation du plan tang. quand on passe d'un point à un autre de la génératrice; ~~chaque~~ point de AB a son plan tang. quoique la droite AB est située dans tous les plans tangents.

A B

lorsque ~~le~~ plan tang. est le même dans tous les points de la génératrice, la surface réglée est développable.

116r

Soit donc une génératrice AB, et une autre génératrice voisine A'B'.



Ces deux génératrices avant une plus courte distance qui sera OO'. Par O' je mène O'K parallèle à AB ; je prends le point M et je cherche en ce point la position du plan tangent.

Du point M j'abaisse une perpend. sur le plan KO'B' ; par M' j'élève MI perpendiculaire sur O'K ; je joins MI.

Soit MM' cette perpend.

Le plan AMI a pour limite le plan tang. au point M. Ce plan tang. doit contenir AB. Le point M et I sont des points de la surface ; la ligne MI est une droite qui intercepte une certaine courbe ; si j'imagine une courbe qui serait le lieu des points de I. Quand A'B' s'approche de AB, MI sera tang. à cette courbe quand A'B' tendra à se confondre avec AB. Le plan tang. serait connu ~~quel que plan tang~~, si l'on connaissait l'angle que ce plan fait avec BOO'.

Soit M'MI = φ. évaluons la limite de cet angle ; cet angle mesure l'angle des deux plans AMM' et du plan tang. On a

$$tg\,\varphi = \frac{M'I}{MM'} \quad \text{or} \quad MM' = OO' = \varepsilon \quad \text{donc} \quad tg\,\varphi = \frac{M'I}{\varepsilon}.$$

$$\text{or} \quad M'I = M'O'\,tg\,\alpha \quad \text{donc} \quad tg\,\varphi = \frac{M'O'\,tg\,\alpha}{\varepsilon}.$$

$$\text{donc} \quad \lim.\ tg\,\varphi = \lim.\ M'O' \times \lim.\ \frac{tg\,\alpha}{\varepsilon} = OM\ \lim\ \frac{tg\,\alpha}{\varepsilon}.$$

$$\lim.\ \frac{tg\,\alpha}{\varepsilon} = \lim\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\ \frac{tg\,\alpha}{\alpha}\right) = \lim\ \frac{\alpha}{\varepsilon}. \quad \text{donc} \quad tg\,\varphi = OM.\ \lim.\ \frac{\alpha}{\varepsilon}$$

or on peut avoir

$$\lim.\ \frac{\alpha}{\varepsilon} = K. \quad \lim.\ \frac{\alpha}{\varepsilon} = 0. \quad \lim\ \frac{\alpha}{\varepsilon} = \infty$$

117

1er Cas

C'est alors où α et ε sont 2 infiniment petit du même ordre. l'angle de deux génératrices voisines est de même ordre que leur plus courte distance.
on a alors $tg\,\varphi = K \times OM. = Kl$.

tang. de φ augm. [proportionnellement] à la [distance] du point M au [point] O.

Si on part du point O on aura zéro; si on s'éloigne l'inclinaison augmente; et le plan tang. tend à tourner de 90°; si on s'éloigne à l'infini.

On déduit de là que tout plan qui passe par une génératrice est tang. en certain point; et normal en un autre point.

Soit $\lim \frac{\alpha}{\varepsilon} = 0$ constamment.
la surface est cylindrique

M s N

A B

Je trace une courb. ~~qui coupe~~ coupant les points où la mesurent la plus courb. distance de 2 gen. Voisi. les arcs de ~~la courbe~~ ~~sont plus petit~~, compris entre deux génératrices voisines étant plus grands que les plus courtes distances correspondantes

soient $s_1\, s_2 - s_n$ ces arcs.
de sorte que $s_1 + s_2 + - + s_n = S$. S étant MN.
~~Soient~~ $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 - \varepsilon_n$ les plus courtes distances. on aura

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \quad \varepsilon_n < S$.

Dans le cas qui nous occupe, α est un infiniment du 2e ordre par rapport à ε. on aura donc

donc ~~lim~~ $\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} = h_1$ ~~lim~~ $\frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} = h_2$ ~~lim~~ $\frac{\alpha_n}{\varepsilon_n} = h_n$.

$h_1\ h_2 - h_n$, étant des quantités très petites qui convergent vers zéro.
quand on augmente le nombre des génératrices comprises entre A et B.

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \quad + \alpha_n}{\varepsilon + \varepsilon_1 \quad - \quad \varepsilon_n} = H.$$

H étant compris entre la plus grande et la plus petite des quantités $h_1, h_2, - h_n$.

Cette fraction devra tendre vers zéro; et comme le dénominateur a une limite finie, le numérateur doit avoir une limite nulle. –

O

A, P'

Par un point O de l'espace, je mène des parallèles à les différentes génératrices; le cône ainsi formé se réduira à une droite; du point O je décris une sphère avec un rayon égal à 1.
les angles compris entre 2 génératrices ~~tendent~~ tendront à avoir pour mesure les arcs; et l'angle A,OP, aura pour mesure l'angle A,OP. Car chaque angle ayant pour mesure un arc correspondant, la somme des angles aura pour mesure la somme des arcs. donc OA, et OP, se confondent.

117v

3e Cas — la surface est développable.

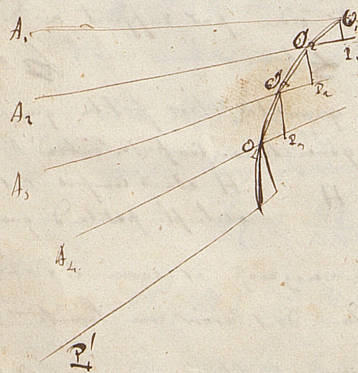
on avait tout à l'heure $tg\varphi = l. \lim \frac{d}{\varepsilon}$.

donc $tg\varphi = \infty$. donc $\varphi = 90$; donc il est perpend. au plan BOO'

Il y a une difficulté; au point O' on pourrait dire, le plan tang. doit contenir AB, et OO'; donc le plan tang. serait BOO' contrairement à ce que nous avons trouvé; ceci est inexact, car de ce que O et O' se réunissent en un seul point, il ne s'ensuit pas que la ligne OO' devienne tang.; cette elle ne le deviendrait pas s'il y avait en O un point de rebroussement. C'est précisement ce qui arrive. toutes les surfaces développables ont une; il faut remarquer que le point O n'est pas fixe; car quand A'B' se déplace la plus courte distance se déplace aussi

et alors en deux points infiniment voisins on aurait deux plans tang. perpendiculaires entre eux, de sorte qu'il y aurait discontinuité.

Dans les surfaces développables, les tang. à cette courbe de la surface forment une surface développable où les génératrices sont tangentes à une même courbe.



Je prends la courbe qui passe par les points où se mesure la plus courte distance des deux génératrices voisines

soit A, P' deux génératrices à distance finie, j'intercale des génératrices et la somme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \quad\quad + \varepsilon_n$$

aura zéro pour limite.. —

~~Car~~ puisqu'on a $\lim \frac{\alpha}{\varepsilon} = \infty$ on a alors $\lim. \frac{\varepsilon}{\alpha} = 0$ donc

$\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = h_1 \quad \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = h_2 \quad \frac{\varepsilon_3}{\alpha_3} = h_3$ etc

Je mène les cordes; j'aurai $O_1 O_2 = \frac{\varepsilon_1}{\cos\varphi_1} \quad O_2 O_3 = \frac{\varepsilon_2}{\cos\varphi_2}$

la somme des cordes sera $\left(\frac{\varepsilon_1}{\cos\varphi_1} + \frac{\varepsilon_2}{\cos\varphi_2} + \quad\quad \frac{\varepsilon_n}{\cos\varphi_n}\right) =$

$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \quad - \quad \varepsilon_n) K$, K étant compris entre $\frac{1}{\cos\varphi_1}$ — $\frac{1}{\cos\varphi_n}$

en effet soit —

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + - + \varepsilon_n}{\alpha_1 + \alpha_2 - + \alpha_n} = H$$

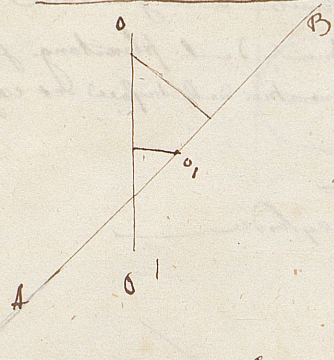
comme $\alpha_1 + \alpha_2 - + \alpha_n$ ne peut augmenter indéfiniment $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + - + \varepsilon_n$ tend vers zéro.

~~Car si le point O~~ ~~on aurait de plus~~ ~~sa génératrice~~ on aurait autour ~~et on aurait~~

il faut que de quantité $\frac{1}{\cos\varphi}$ soit infinie, ou que $\varphi = 90$

Comme lim $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0$ il faut que k soit infini. et comme celui est indépendant de la distance des deux generatrices, on conclut que pour deux generatrices aussi rapprochées qu'on voudra on aura $\varphi = 90°$. Ma droite $O_1 O_2$ est parallèle a OA_1 et comme a la limite $O_1 O_2$ est tang. , OA_1 a la limite sera aussi tangente.

Reciproquement si on prend une courbe a double courbure, et si au moyen de tang. le lieu de ces tang. est une surface developpable nous demontrerons cela plus tard. —



Une droite tournant autour d'une autre engendre une surface gauche non developpable. Comme la surface est une surface de revolution la normale va rencontrer l'axe. or si le plan tang. etait constant pour tous les points de la generat. AB, les normales seraient paralleles. or il est impossible que des droites paralleles passant par tous les points de AB, rencontrent l'axe OO' qui n'est pas dans un meme plan avec AB. — nous pouvons calculer l'angle que le plan tang. fait avec le plan des axes φ d'avec la tang. en supposant OM.

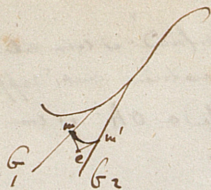
~~La surface developpable peut etre envisagée comme l'enveloppe des plans tang. à cette surface, les plans tangents etant determinés par un seul paramètre.~~

La courbe telle que ses tangentes donnent la surface developpable est dite arete de rebroussement.

Une autre propriété des surfaces developpables c'est qu'on peut les considerer comme enveloppe de plans mobiles, mais ayant un seul paramètre dans leur equation. Car en chaque point de l'arete de rebroussement, il n'y a qu'une seule tangente; donc il n'y aura qu'un seul plan tang. tout le long de la tang. donc pour un point qlq.^m de la surface il suffira de donner le point A ou la gener. mA touche l'arete de rebroussement. Mais un point sur une courbe donnée est determinée par 1 seule variable donc etc.

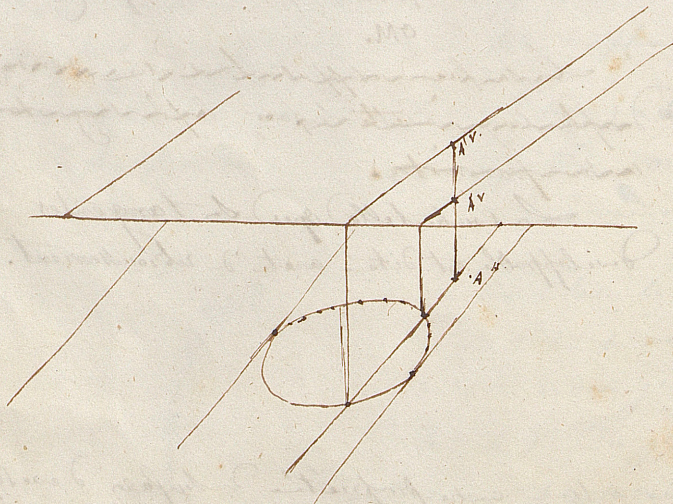


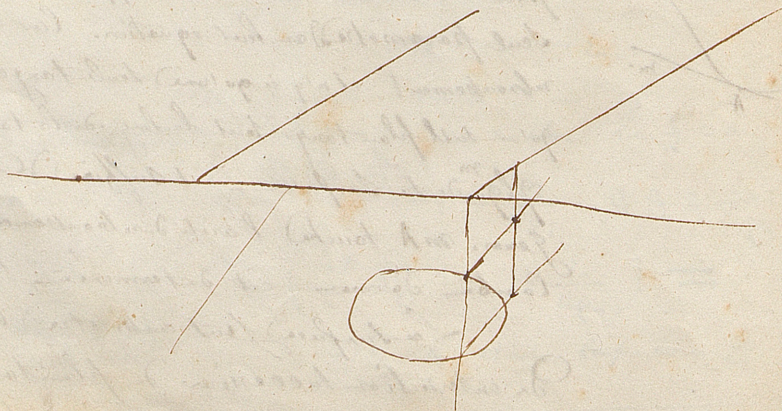
La surface peut aussi etre considérée comme le lieu des intersections successives des plans tang. Soient G_1 et G_2

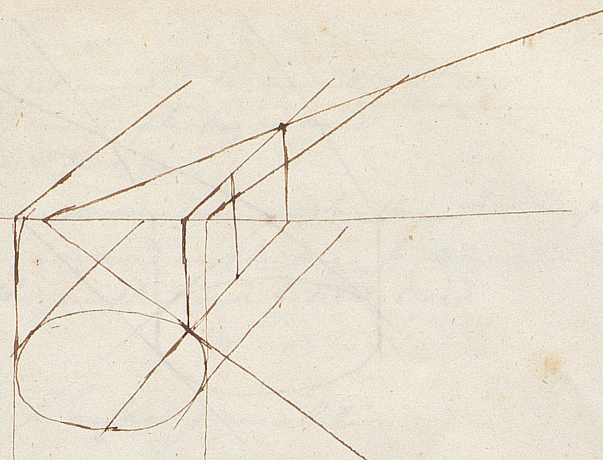


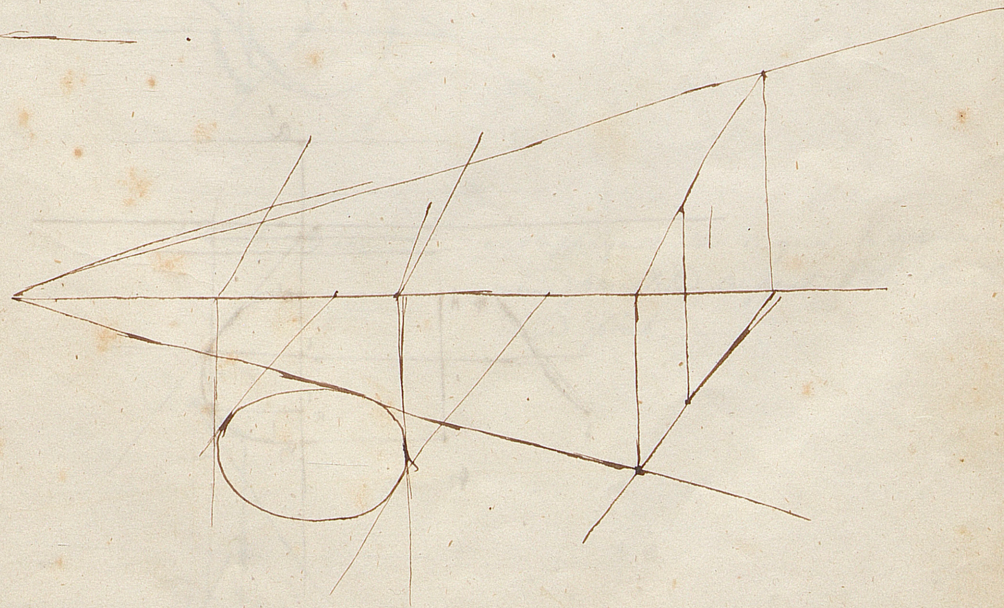
deux génératrices voisines je mène un plan sécant quelconque, ce qui donne mm' arc de la courbe. la tang. en m est dans le plan tangent suivant G_1 la tang. en m' est dans le plan tang. suivant G_2. mais ces deux tang. se coupent en I très près de mm'. donc l'intersection des deux plans tang. suivant G_1 et G_2 est très voisine de chacune des génératrices. cela tombe sur la génératrice G_1 quand G_2 approche de G_1 indéfiniment, donc les plans tang. par leurs intersections successives reproduisent les génératrices de la surface et engendrent la surface —

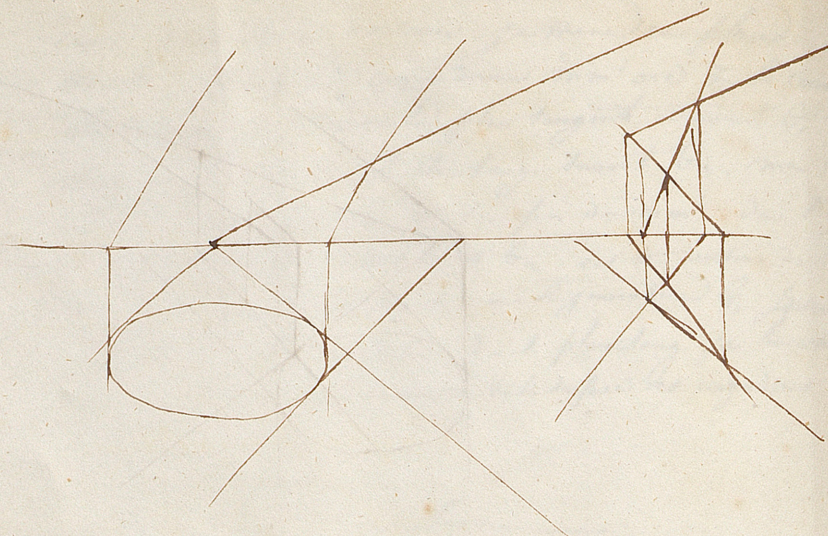
Plan tang. au cylindre —

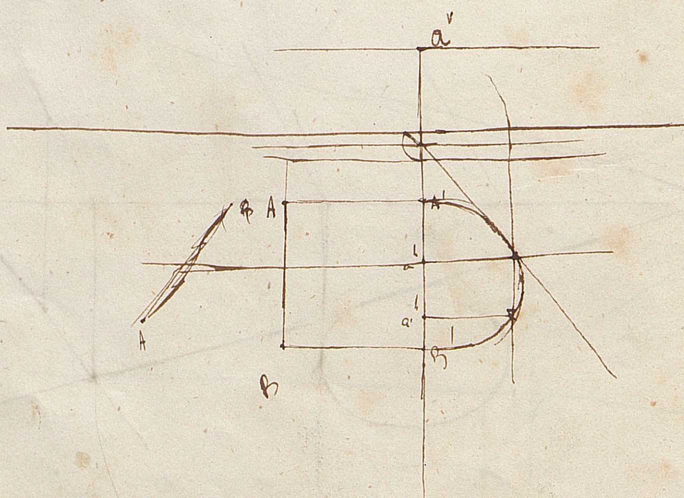




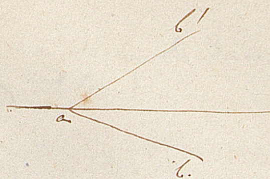







a'
A
B

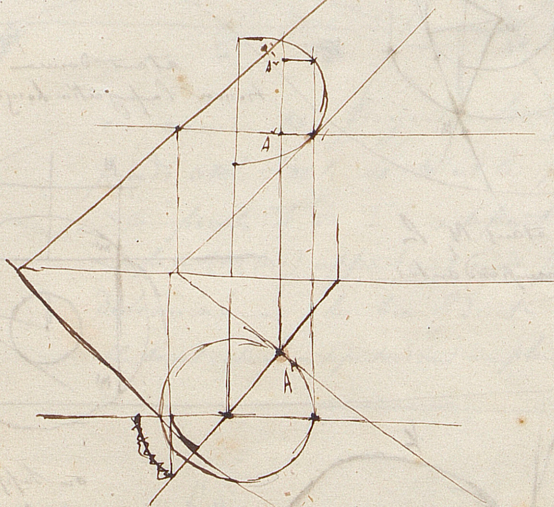
Un cone est engendré par une droite ab, a'b', ; mener un plan tang au cone par un point pris sur le cone.



Mener à ce même cone un plan tang. par un point extérieur

mener à le cone un plan tang. parallèle à une droite, qui est elle même parallèle au plan de la base du cone.

Surface de révolution.



Etant donné la projection horizontale d'un point trouver la projection verticale

Mener un plan tang. en un point de la surface.

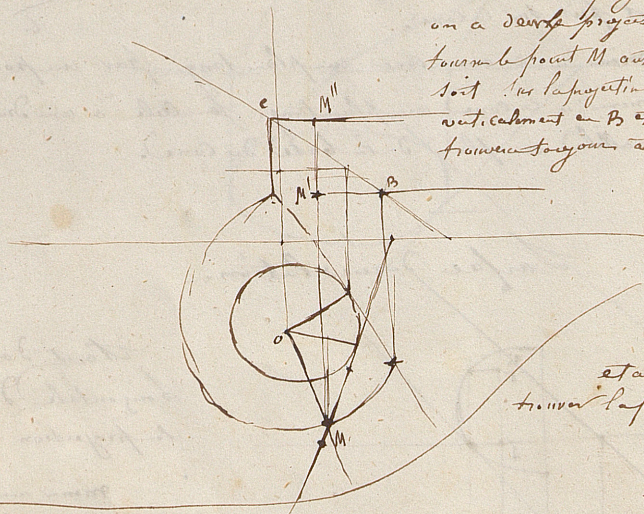
---

2 Construction ; en s'appuyant sur ce que les normales à un même parallèle coupent toutes l'axe en un même point.



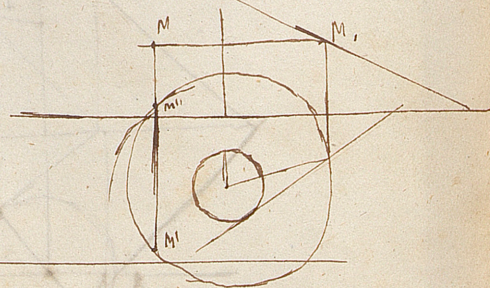
au lieu de donner la courbe meridien, on donne une generatrice dans une certaine position. connaissant la projection horyontale d'un point, deduire la projection verticale.

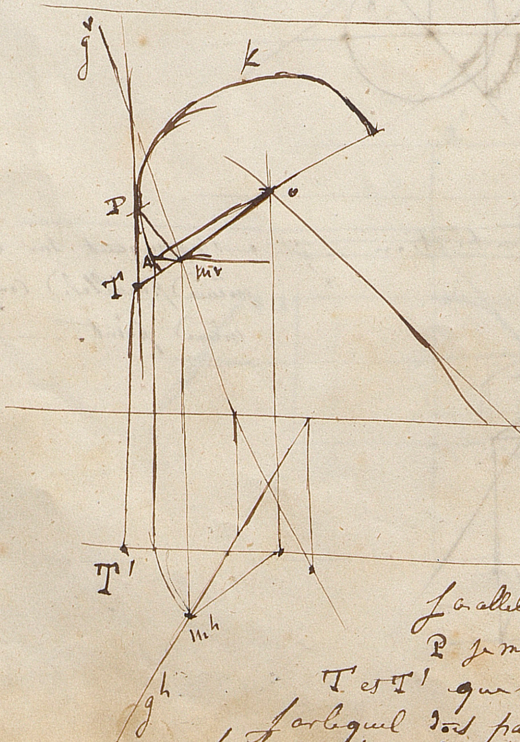
la projection horyontale du point etant M, on a deux projections verticales. M' M''. je fais tourner le point M autour du point O jusqu'a ce que ce point soit sur la projection horyontale de la droite; il se projettera verticalement en B et C. si on ramène, ce point se trouvera toujours a la meme hauteur.



La projection verticale etant M, la projection verticale correspondantes sont M' et M''.

etant donné la projection verticale trouver la projection horyontale

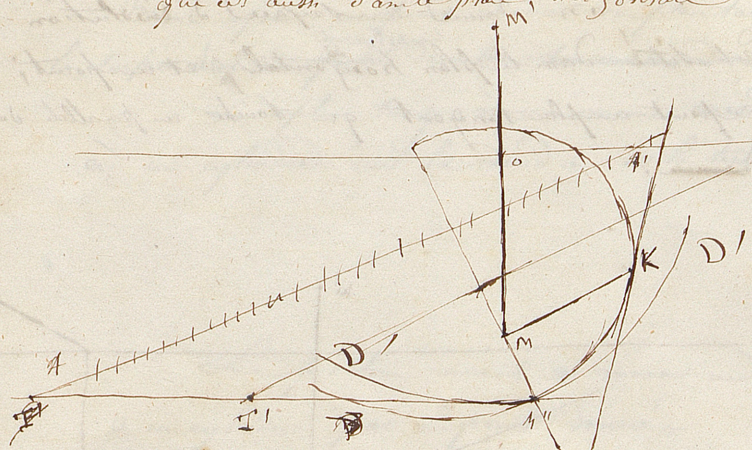




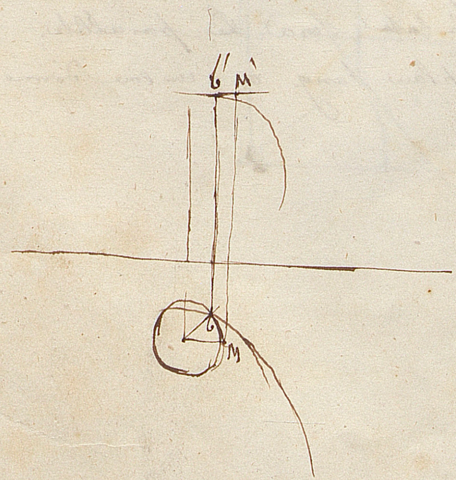
on suppose l'axe parallele au plan vertical. on donne une génératrice (g^v, g^h). et un point ($m^v m^h$) sur cette generatrice. trouver le plan tang. au point M

je cherche la distance du point donné à l'axe. cette distance est egale a OA. le cercle OAK est la projection du parallèle qui passe au point donné et qu'on a fait tourner de manière a le rendre parallele au plan vertical. si au point P je mène la tangente, j'obtiendrai T et T' qui seront les projections d'un point par lequel doit passer le plan. mais il doit passer par la generatrice donnée; donc il est determiné.

l'axe est dans le plan horizontal; on donne la directrice DD' qui est aussi dans le plan horizontal



on donne M projection horizontale d'un point. je prends oM' = MK, et M' est la projection verticale du point. Le point T et T' appartiennent au plan tangent. Le point (M, M') appartient au plan tang. donc ce plan est determiné par les deux droites T'M', TK ~~appartiennent~~ qu'on elle serait relevée et appartiendront au plan tangent. donc ce plan est determiné.



on donne l'axe perpend. au plan horizontal, et les deux projection d'une génératrice. si on donne la projection horizontale M. la projection ~~horizontale~~ verticale sera M'

Le plan tang en (M, M') contiendra la tangente au parallèle. il doit contenir la tangente ~~au parallèle~~ la directrice. or au point (b, b') la tangente se projette suivant les tangentes aux projections. j'aurai ainsi une droite que je ferai tourner jusqu'à ce qu'elle passe au point (M, M'). Le plan tang. sera ainsi determiné.

on pourrait chercher le point où la normale au point (M, M') coupe l'axe. pour cela aux point b, et b' je mene les tang. aux projections. puis par le point (b, b') je mene un plan perpend. à cette droite le point de rencontre de l'axe et de ce plan, est le point où coupe la normale au point (M, M').

121v

on donne une surface de révolution dont l'axe est situé dans le plan horizontal, et un point; menez par ce point un plan tangent qui touche un parallèle donné ~~à un point donné~~.

m'

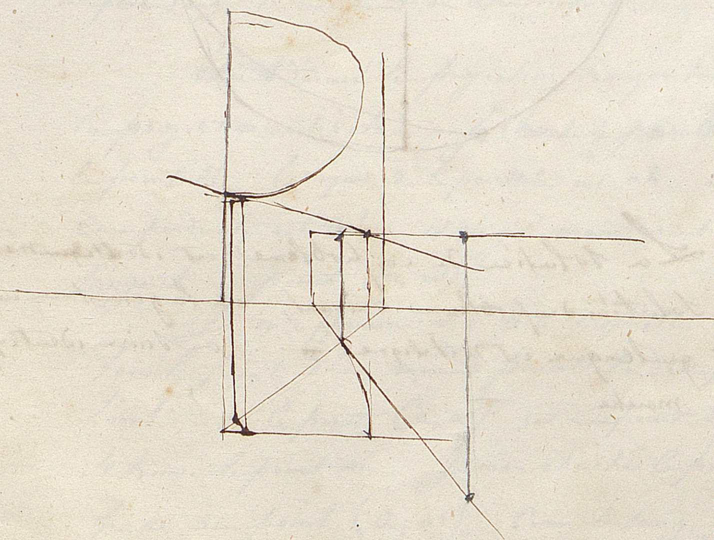
m

par un point donné on petit ~~[illegible]~~ suppose qu'on mène le plan tang. *Et tous les points d'un même parallèle on aura un cone dont la base sera le parallèle. la question revient donc à mener un plan tang. à un cone donné par un point donné.

Mener par un point donné un plan tang. qui touche la surface selon un ~~point~~ méridien donné ~~sur un méridien donné~~.

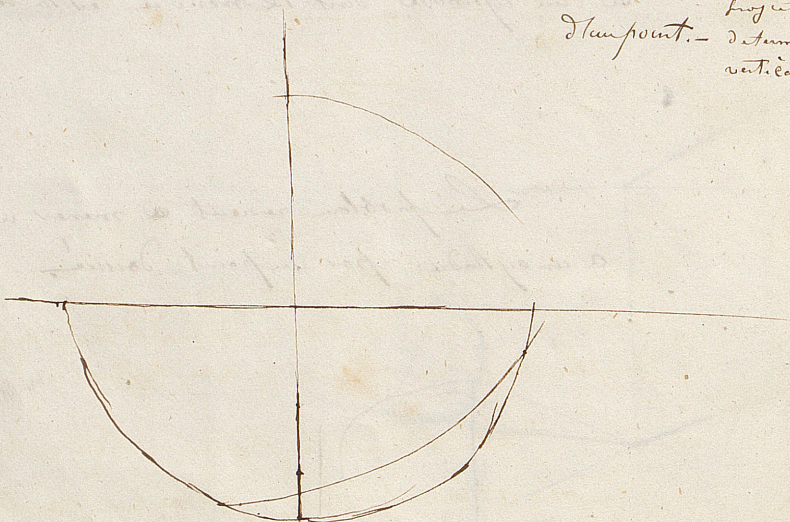
Le plan tang. à un meme méridien sont tange à un cylindre dont le méridien est la section droite

Le problem revient à mener un plan tangent a un cylindre par un point donné.

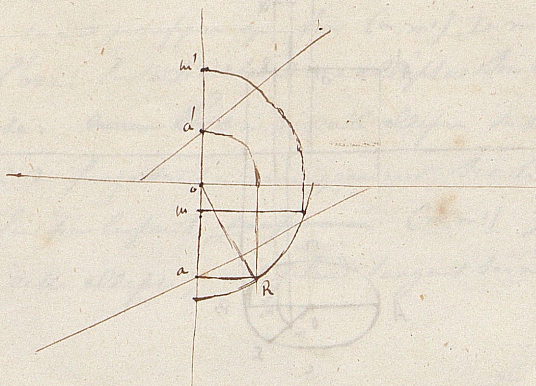


on donne une surface de revolution définie par son axe qui est la ligne de terre, et la projection d'une la courbe ~~directrice~~ génératrice dans une position quelconque.

d'un point. — on donne la projection horizontale determiner la projet. verticale.



La solution de ce probleme est identiquement même que la solution du probleme suivant, où la generatrice au lieu d'être quelconque est rectiligne — on suivra identiquement la même marche — —

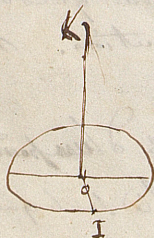


Si on a une surface engendrée par une droite qui tourne autour de la ligne de terre, et dont on donne les deux projections. Mener un plan tang. en un point de cette surface.

~~Étant~~ donné la projection horizontale d'~~un~~ point trouver la projection verticale. Je cherche le parallèle sur lequel se trouve le point M ; le rayon de ce parallèle est OR. La projection verticale correspondante est m'. Il s'agit maintenant de mener un plan tangent au point (m, m').

Je m'appuierai sur cette propriété que la normale en tous les points d'un même parallèle coupe l'axe au même point. — Or le point (a, a') est un point du parallèle sur lequel se trouve le point m. Je vais chercher le pied de la normale qui passe au point (a, a'). Comme la tang. au point (a, a') ~~se~~ ~~confond~~ ~~avec~~ ~~la~~ ~~génératrice~~ se confond avec la génératrice elle même, il suffit de mener par le point (a, a') un plan perpend. à la génératrice. Le point où ce plan coupera la ligne de terre sera le pied de la normale. On joindra ce pied au point M et on mènera par le point M un plan perpendiculaire. Ce sera le plan tangent.

On donne une surface ayant pour base une ellipse horizontale dont les projections sont ADBC et A'B'. La surface est telle que si par OK perpend. à la base on fait passer un plan KOI la section est une ellipse dont l'un des axes est O'K et l'autre est OI.



On donne la projection horizontale d'un point, trouver la projection verticale.

Soit m la projection verticale d'un point. Je mène le plan KOI et je fais tourner ce plan autour de l'axe dont le pied est en O. de cette manière l'ellipse interceptée par ce plan se projettera en vraie grandeur sur le plan vertical. Je calcule l'ordonnée de l'ellipse dont les axes sont O'K et OI, correspondante au point dont l'abscisse est Om ce qu'on peut faire sans construire l'ellipse; je suppose ~~cette~~ longueur de cette ordonnée calculée; elle se projettera suivant PQ; en supposant PQ égale à cette longueur. En revenant à la position primitive, la projection verticale sera m'.

Mener un plan tang. en ce point. Je ~~mène la tangente~~ suppose l'ellipse relevée dans le plan KOI ramenée à être parallèle au plan vertical; je pourrai mener par le point de cette ellipse qui se projette en Q une tang., sans construire l'ellipse; puis ~~je~~ chercherai cette tangente dans sa véritable position

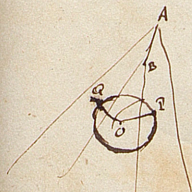
maintenant je suppose que par (m, m') je mène un plan perpendiculaire à l'axe: la section sera une ellipse semblable à l'ellipse ~~proposée~~ de base. ~~[illegible]~~ les axes de cette ellipse sont faciles à déterminer. ces axes se projettent en vraie grandeur sur les axes de l'ellipse ABCD. alors par le point ~~je pourrai~~ (m, m') je pourrai mener une tang. à cette ellipse; le plan tangent sera ainsi déterminé. —

Mener à une sphère un plan tangent passant par une droite donnée.

On sait que par un point extérieur on peut mener une infinité de plans tangents, qui seront en même temps tangents à un cone, et la courbe de contact est un petit cercle de la sphère.

On prendra sur la droite donnée deux points, qu'on considère comme les sommets de deux cones circonscrits; le plan tang. demandé ~~[illegible]~~; ~~[illegible]~~ ce plan cherché touchera la sphère en un point d'une courbe de contact; il touchera aussi la sphère en un point de la deuxième courbe de contact. donc le point d'intersection de deux courbes de contact sera le point de contact cherché; le plan sera donc déterminé.

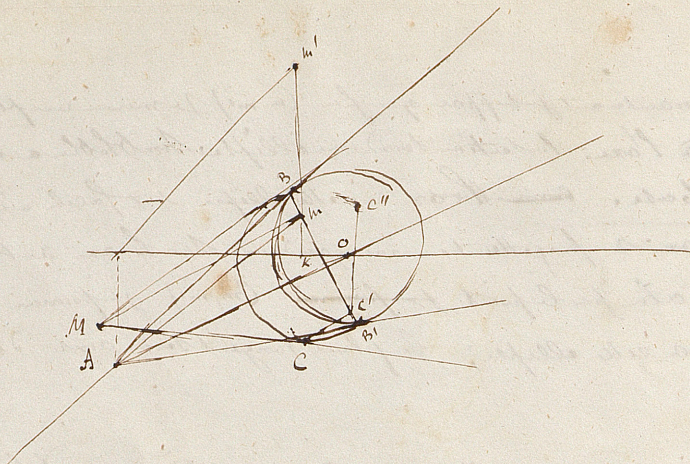
2e solut. on peut donner une autre solution. en ramenant la ramener à celle ci; mener un plan tang. à un cone par une droite passant par le sommet du cone.



3e solution. a priori on peut mener deux plans tangents par la droite.* le plan POQ est déterminé comme étant perpendiculaire à la droite donnée AB. on peut donc déterminer le grand cercle qui contient les points P et Q. or le plan est coupé par AB en un certain point; si par ce point on mène ~~deux~~ tangente au cercle POQ, les points de contact P et Q seront déterminés. — et le plan tangent sera déterminé.

* du point O j'abaisse OP, OQ perpend. sur chaque plan tang.

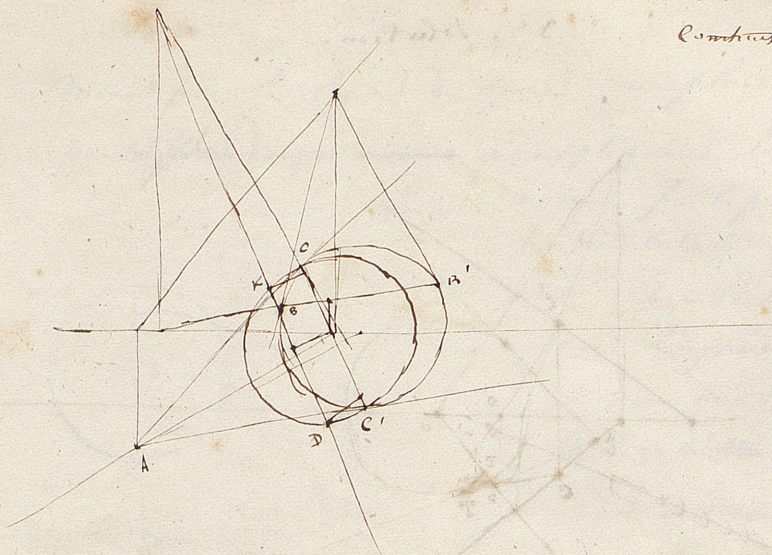
124 v



on donne une sphère dont le centre est situé sur la ligne de terre. 2e solution.

2e solution. Je considère A comme sommet de cone; si par le point A je mène deux tangentes au cercle o. j'obtiendrai BB'; BB' est le diametre d'un parallèle que je peux considérer comme la base du cone. je cherche l'intersection (m, m') de la droite donnée avec la base du cone. je rabats ce point et la base du cone autour de BB'. le rabattement de (m, m') est M. ou Mm = m'k. par le point M je mène deux tangentes au parallèle rabattu. soit C un des points de contact le point relevé aura pour projection C', C''. il n'y aura plus qu'à mener un plan par ce point et la droite donnée.

Solution fondée sur la construction de deux cones.



Je prends la trace horizontale de la droite donnée pour sommet de l'un des cones, et la trace verticale pour le sommet de l'autre cone. J'obtiendrai ainsi pour les bases des cones deux parallel qui auront pour diametre BB' et CC'.

L'intersection de deux cercles donnera les deux points de contact cherché.

Pour déterminer l'intersection de ces cercles je determine d'abord l'intersection de leur plans, et il est evident que les projection de cette intersection sont precisement BB' et CC'. Je fais tourner cette droite autour de CC' avec le parallèle dont le diametre est CC'. J'obtiens le rabattement des deux points d'intersection. Si on relève ces points on aura deux plan qui seront determinés.

3e solution.

Par le centre de la sphère je conduis un plan perpendiculaire à la droite donnée. Je cherche l'intersection (C, C') de la droite donnée avec ce plan; je rabats ce point autour de la trace horizontale du plan; j'obtiens C'' et de ce point je mène deux tangentes au cercle.

Considérons la tangente C''T j'abaisse TP perpendr. sur KO. Si je joins ce point C au point D, j'aurai la projection horizontale de la tangente; C'D' sera la projection verticale; alors le point de contact relevé aura pour projection (m, m'). On déterminerait l'autre point de contact de la même manière.

Mener par la ligne de terre un plan tangent à une sphère donnée —— en appliquant la dernière construction. Je menerai par le point (o,o') un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Je rabats l'intersection de ce plan avec la sphère, et par le point a je mène deux tangentes au grand cercle rabattu. J'obtiens le rabattement du point de contact qu'il est facile de relever. —

Mener par une droite verticale un plan tangent à une sphère donnée.

appliquer la méthode de ~~l'axe~~ cone circonscrits.

au cas générale

(a, a') est le point où la droite donnée rencontre le plan horizontal passant par o'. – dans ce plan menons à la sphere les deux tangentes ~~ab, ac~~ dont les project. horizontales sont ac et bd. – bc est la project. horizontale du cercle de contact du cone circonscrit et de la sphere : (m, m') est l'intersection de ce plan et de la droite donnée. – (mh = km'. –)

ou suivant la methode générale par le point (m m') on mene une tangente au cercle de base et on cherche le point où cette tangente coupe la ligne (bc, a'o').

le plan tangent sera determiné. –

appliquer au même probleme la methode de deux cones circonscrits. –



determiner le cone circonscrit à deux sphères données, mener un plan par la ligne des centres. et dans ce plan construire les deux tangentes ac, bd qui par leur rotation autour de oo' engendrent un cone

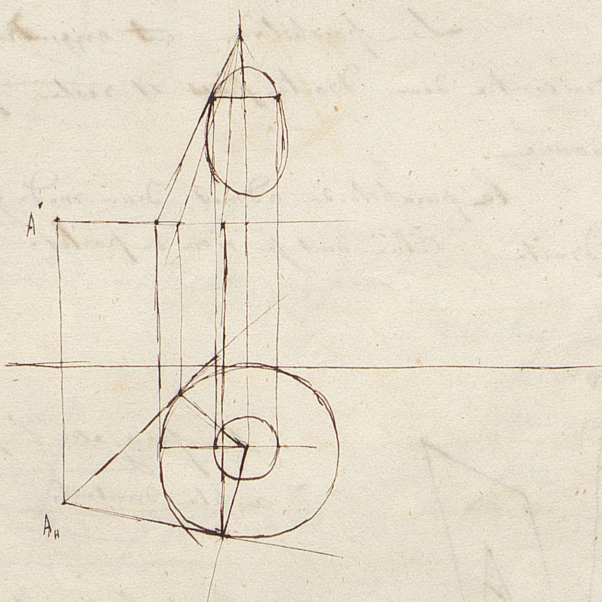
~~mener un plan tangent commun à une sphere et à un cone en remarquant que~~

mener un plan tangent commun à une sphère et à un cone

mener un plan tangent par une droite à une surface quelconque —

on choisit un point sur la droite et on considère ce point comme le sommet d'un cone circonscrit dont on détermine la courbe de contact ; on prend un deuxième point que l'on considère comme le sommet d'un 2e cone circonscrit dont on détermine la courbe de contact. l'intersection de les deux courbes sera le point de contact.

étant donné une surface de révolution et un point extér.



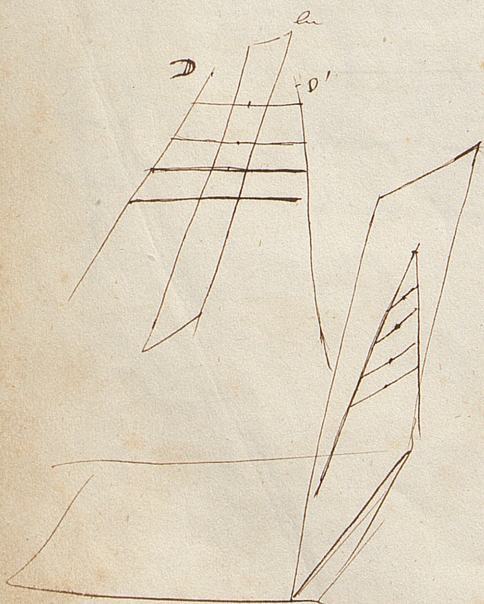
La méthode peut être étendue à un ellipsoïde.

Plan tangent à une surface gauche

Une surface gauche étant donnée, tous les plans tangents le long d'une même génératrice sont aussi tangents à une surface gauche appelée paraboloïde.

Le paraboloïde est engendré par une droite qui rencontre deux droites fixes et reste parallèle à un plan donné.

Le paraboloïde admet deux modes de génération par une ligne droite, celui dont je viens de parler, et un autre que le nouveau



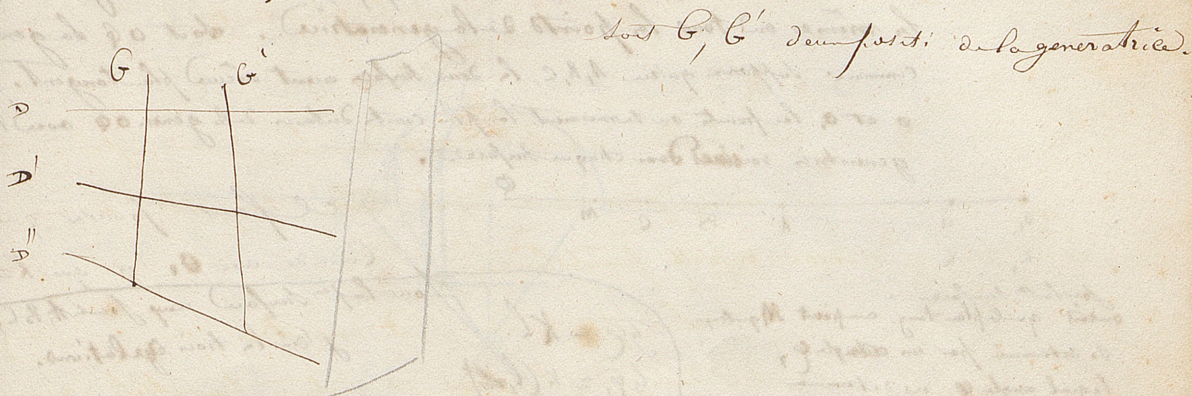
Je projette la figure sur le plan parallèle au plan directeur.

Toutes les génératrices se projetteront suivant des parallèles

Ainsi le paraboloïde peut être engendré par une autre droite qui rencontre un autre plan déterminé, et deux quelconques des génératrices

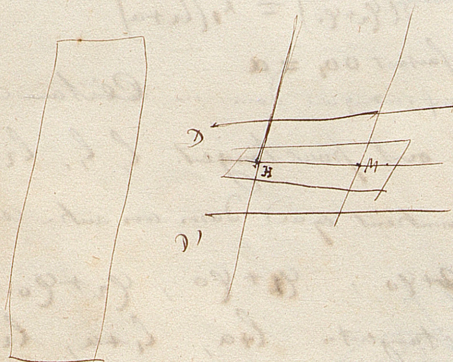
Il peut aussi être engendré par une droite qui en rencontrerait trois autres parallèles à un même plan.

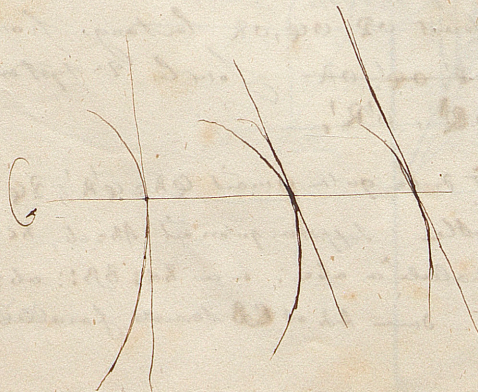
soit G, G' deux positi de la generatrice.



Mener un plan tang. à un paraboloïde, défini par deux directrices et un plan.

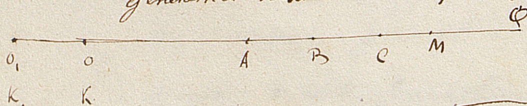
Trouver le plan tang. au point M, par ce point M il passe deux generatrices, qui déterminent le plan, je cherche la generatrice du 2e système qui passe en M.





128v

Si deux surfaces gauches ont une generatrice commune si elles ont trois plans tangents communs, les plans tangents seront les mêmes en tous les points de la generatrice. Soit OQ la generatrice commune. supposons qu'en A, B, C, les deux surfaces aient même plan tangent. Soient o et O_1 les points où se mesurent les plus courtes distances de la gener. OQ avec les deux generatrices voisines dans chaque surface.



Il faut prouver que O coincide avec O_1 et que $K = K_1$.

Pour la 1re surface aux points A, B, C, j'ai les trois égalations.

$\operatorname{tg} \varphi = K l$.

$\operatorname{tg} \varphi_1 = K(l_1)$

$\operatorname{tg} \varphi_2 = K(l_2)$

Pour la 1re surface on sait que le plan tang. au point M quelconque se determine par un angle φ, lequel angle φ est determiné par $\operatorname{tg} \varphi = K \cdot OM$ et K étant le limite du rapport de l'angle de 2 gén. vois. à leur plus courte distance.

Pour la deuxieme surface, le plan tang. en un point qlq. M est déterminé par l'angle φ. et on a la relation

$\operatorname{tg} \varphi = K_1 \times O_1 M$

Pour la 2e surface si on designe par φ_0 l'angle du plan tang. en O à la 1re surface et du plan tang. en O_1 à la deuxieme surface

j'aurai $\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0) = K_1(l + a)$

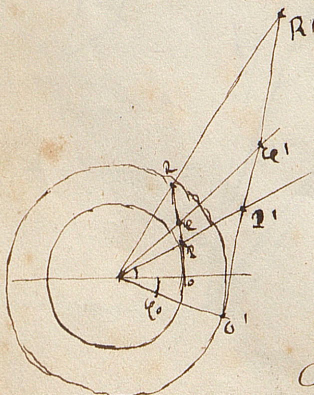
$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_0) = K_1(l_1 + a)$

$\operatorname{tg}(\varphi_2 + \varphi_0) = K_1(l_2 + a)$

en faisant $OO_1 = a$

Les 1res égalités signifient que dans un certain cercle les angles φ, φ_1, φ_2 ont pour tangentes l, l_1, l_2.

Les secondes egalités montrent que dans un autre cercle les angles $\varphi + \varphi_0$, $\varphi_1 + \varphi_0$, $\varphi_2 + \varphi_0$. ont pour tangentes $l + a$, $l_1 + a$, $l_2 + a$.

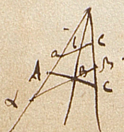


Soient OP, OQ, OR les tang. pour le 1er syst. ~~Soient OP', OQ', OR'~~ pour le 2e systeme elles seront O'P', O'Q', O'R'.

Il suit de là qu'on aurait $QR = Q'R'$, $PQ = P'Q'$.

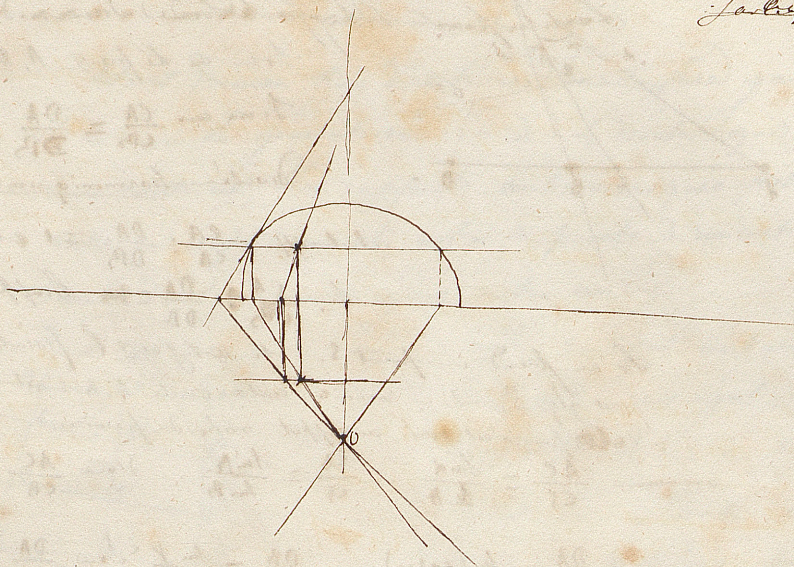
Ce qui est impossible. supposons qu'on ait $AB = ab$, $BC = bc$.

Je mene dBD parallele à abc. on a $Bd : BD :: ab : bc$ ou $Bd : BD :: AB : BC$. donc Ad et CD seraient paralleles.



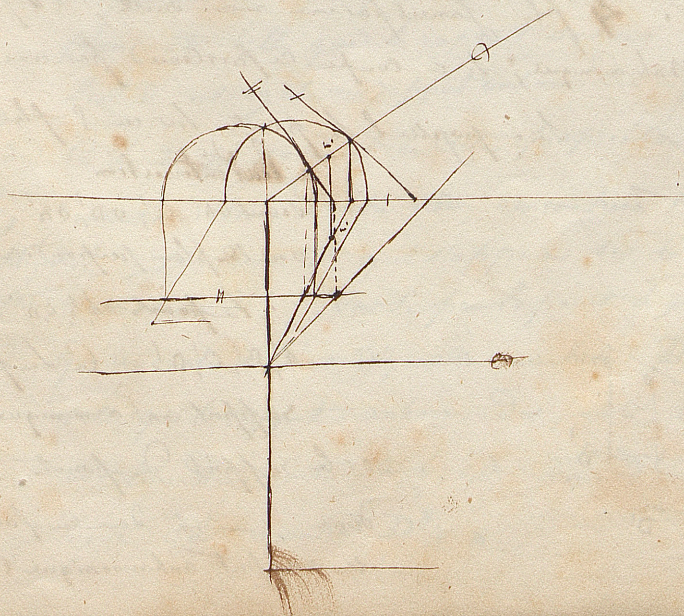
Conoïde droit

[illegible]



Mener un plan tang. en un point —

Surface du biais passé.



129 v

avant de parler de l'hyperboloïde exposons quelques principes de géométrie.

~~hyperboloïde ... mode de génération.~~

Si on a 4 points A, B, C, D en ligne droite

Si on a $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, la droite est divisée harmoniquement.

celui rapp. $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = 1$ est dit rapport harmonique

Si $\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = m$ le rapp. est anharmonique.

Si on prend un point S. si on joint les points A, B, C, D à un point qlq. S, si on mène une autre droite A, B' C' D', le rapport anharmonique de ces points est égal au rapport anh. des premiers

on aura $\frac{AC}{CS} = \frac{\sin \alpha}{\sin A}$. $\frac{CB}{CS} = \frac{\sin \beta}{\sin B}$. d'où $\frac{AC}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \times \frac{\sin B}{\sin A}$.

$\frac{DA}{DS} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin A}$. $\frac{DB}{DS} = \frac{\sin \gamma}{\sin B}$ d'où $\frac{DA}{BD} = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$.

d'où $m = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$. donc m est constante

Donc etc —

Corollaire: Si on a un faisceau de 4 droites, il existe pour ce faisceau un certain rapport anharmonique.

Ceci convient évidemment à 4 droites parallèles.

Si 4 pl. passent par une même droite, ce faisceau a un rapport anharmonique; si on coupe ce faisceau par une droite quelconque

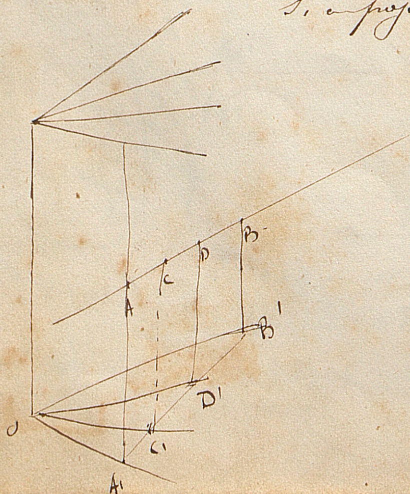
si on projette les points sur un plan perpendiculaire ~~à leur~~ intersection.

Soient OA', OC', OD', OB' les intersect. de ces plans avec le plan perpendiculaire

les points A, B, C, D se projettent en A', B', C', D'. Ces points ont même rapport anharmonique que A', B', C', D'.

or le rapport des points A', B', C', D' est const.

donc —— donc un faisceau de 4 plans a un rapport anharmonique constant. —



Etant donnés trois directrices d'une surface gauche L, L', L'' si on mène les génératrices c. a. d. 4 droites qui rencontrent les trois directrices, les rapports anharmoniques faits sur chacune de celles-ci respectivement, entre les points de rencontre avec les quatre autres droites seront égaux entre eux.



Le rapport anharmonique des points a, b, c, d est égal au rapport anharm. des points a', b', c', d'. et des points a'', b'', c'', d''.

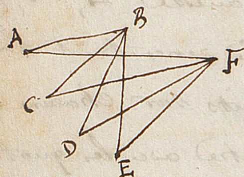
En effet les 4 droites G, G', G'', G''' déterminent 4 plans passant par la droite D. Les quatre points a', b', c', d'. étant les intersections de ces plans par la droite D', leur rapport anharmonique est égal à celui des plans; de même le rapport anharm. des points $a'', b'', c'' d''$ est égal à celui des 4 plans. etc —

Si je considère maintenant les droites G, G', G'', G'''. ~~qui~~ s'appuient sur les deux droites D, et D' non situées dans le même plan, et telles que le rapport anharm. des 4 points situés sur D est égal au rapport anharm. des 4 points situés D', les 4 droites jouiront de cette propriété que toute droite qui rencontrera trois d'entre elles, rencontrera la quatrième.

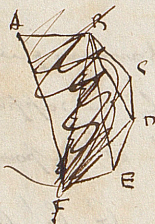
Je mène D'' qui s'appuie sur $G, G' G''$. Je dis qu'elle rencontrera G'''. Car si par le point d je mène une droite qui rencontre D' et D'', elle rencontrera D' en un point δ' tel que le rapport anharm. des points a', b', c', δ' sera égal à celui des points a, b, c, d. donc δ' se confond avec d'. donc $d\delta'$ rencontre D''; x

L'hyperboloïde est engendré par une droite qui rencontre 3 autres non parallel. à un même plan —

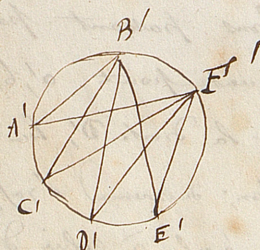
Donc dans l'hyperboloïde il y aura encore deux syst. de génératrices rectilignes, par tout point de la surface il passe deux génératrices rectilignes ce qui ~~permet de construire~~ le plan tangent en un point de la surface —



La section faite par un plan est toujours une courbe du 2e degré. pour que ce soit une section conique, il faut que 6 points q.q. appartiennent à une même section conique. quelle est la condition pour que cela ait lieu. soient 6 points A, B, C, D, E, F; je joins les points B et F aux autres. j'obtiens ainsi deux faisceaux. La condition pour que ce soit une conique est que les deux faisceaux aient même rapport anharmonique. En effet il faut que les 6 points soient sur un cone à base circulaire. je suppose que les

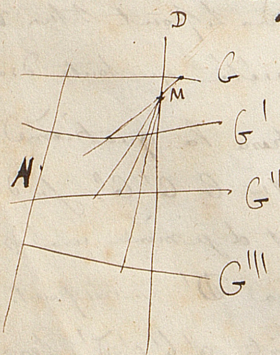


génératrices qui passent en A, B, C, D E F, rencontrent la base en A', B', C', D', E', F'. les faisceaux B et F se projetteront en B' et F'. or les faisceaux ~~projetés~~ B et F, ont chacun même rapport anharm. que B' et F'. mais B' et F' ont même rapport anharmonique. Donc etc —

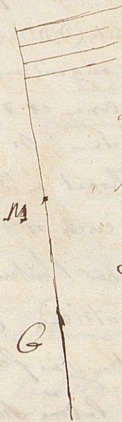


Ceci posé je prends 6 points situés sur la section 4 sur 4 génératrices et 2 sur 2 directrices. soient M, N les points pris sur les deux directrices.

je joins M aux 4 points situés sur les génér. j'obtiens ainsi un faisceau de 4 droites. le rapport sera le même que le rapport anharm. des 4 plans passant par D et G, G', G'', G''', ou que le rapport anharm. des 4 droites G, G', G'' G''' — le faisceau partant de N aura même rapport anharm. que celui des 4 droites G, G', G'', G''' donc les 6 points se trouvent sur une conique.



Si on considère une génératrice de surface gauche si on élève des normales en tous les points, ces normales formeront une surface gauche qui est le paraboloïde hyperbolique. Si je fais mouvoir une droite sur trois de ces ~~tangentes~~ on aura le paraboloïde de raccordement. Si en un point M quelconque, je prends ~~aussi~~ le plan tang. au point M je mène une perpendicul. à G, elle sera comprise dans le paraboloïde de raccordement

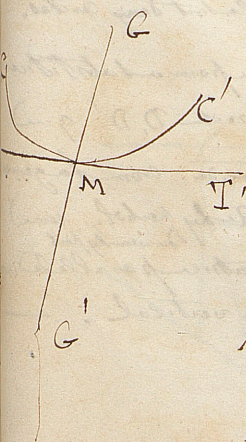


Je suppose que je coupe la surface par des plans parallèles et que je mène les tangentes aux points d'intersection des courbes et de G

Mener un plan tang à une surface gauche par une droite extérieure —

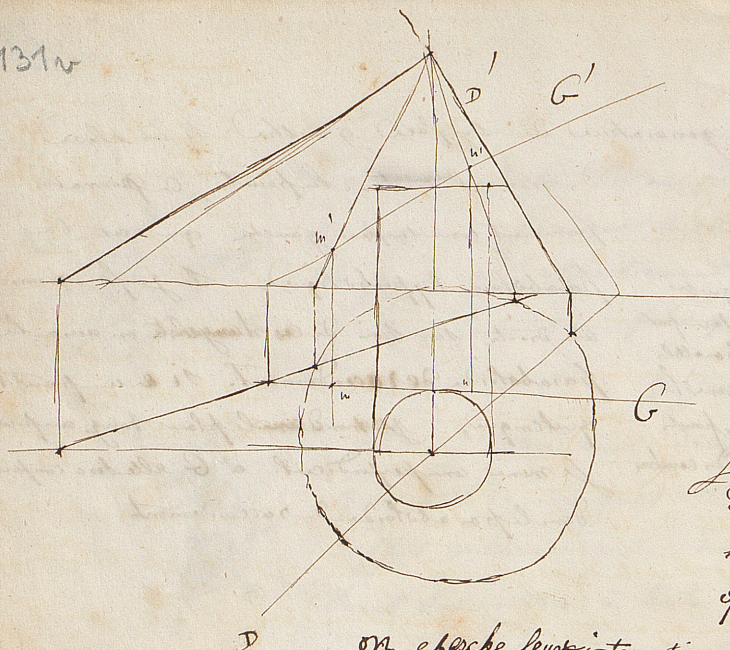
Supposons que l'on trouve le point où la droite donnée rencontre la surface gauche, par ce point faire une génératrice. Si par la droite donnée et la génératrice ~~on~~ on fait passer un plan ce plan sera le plan tangent; car on sait qu'un plan ~~tangent~~ passant par une génératrice est tangent en un certain point. —

Pour avoir le point de contact il faut chercher la courbe d'intersection de ce plan avec la surface outre la génératrice qu'il contient, le point de contact est le point d'intersection de cette courbe et de la génératrice. — ainsi à la figure le point de contact est le point M, intersection de la génératrice GG' et de la seconde courbe d'intersection CMC'. —



Pour déterminer l'intersect. de la droite et de la surface on mènera par la droite un plan, et on cherchera l'intersection de ce plan avec la surface gauche, en construisant l'intersect. de ce plan avec chaque génératrice; on aura une courbe; cette courbe rencontrera la droite donnée en un certain point qui sera le point d'intersection

~~M~~



Intersection d'un hyperboloïde avec une droite D,D' qui rencontre l'axe

La droite (D,D') en tournant autour de l'axe engendrera un cone, et l'inters. de ce cone et de l'hyperbol. sera un cercle ; si ce cercle était connu, il suffirait de déterminer l'intersection de ce cercle et de la droite (D,D').

Je vais chercher l'intersection de ce cone et d'une generatrice. Par le sommet et la generat. je fais passer un plan qui coupe le cone suivant deux génératrices on cherche leur intersection avec la génératrice de l'hyperboloïde.

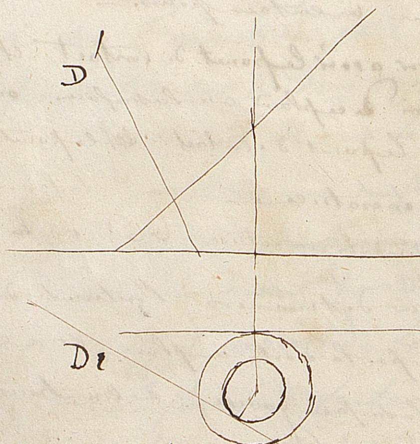
(m,m') et (n,n') sont les points d'intersection de la generatrice de l'hyperboloïde avec le cone. – reste a construire l'intersection de la droite donnée avec les parallèles dont font partie les points (m,m') et (n,n'), on aura ainsi les points d'intersection cherché. —

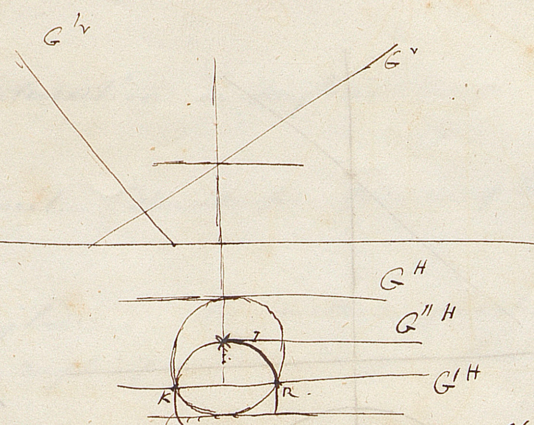
Cas où la droite ne rencontre pas l'axe.

on ramene ce cas au précédent.

on ramene la question a trouver l'intersection de deux hyperb. ayant meme axe ; ce sont deux cercles.

on pourra substituer a la droite D, D' que nous consider. comme la gener. d'un 2e hyperbol., une generatrice du meme hyperb. parallele au plan vertical. —





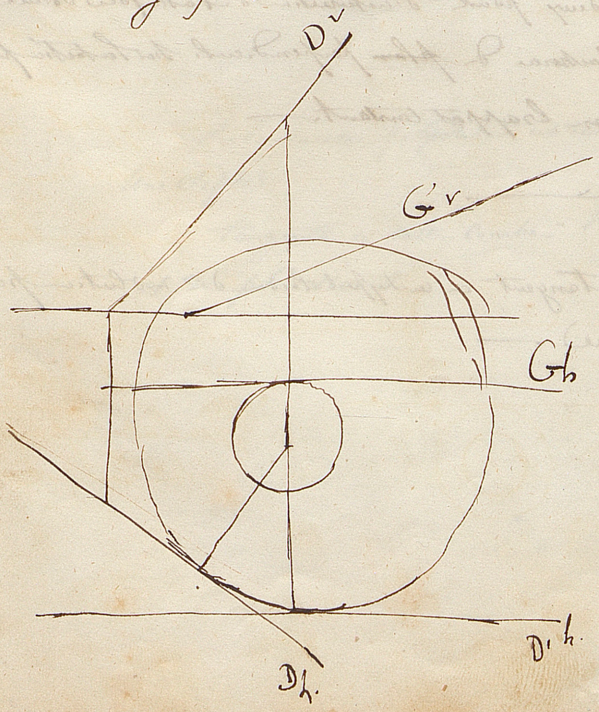
nouvelle donnée. (G'^H, G'^V). général du 1er hyperbolo. et (G''^H, G''^V) génératrice du 2e hyperbol. le plan $G'^H K$. coupe le prem. hyperb suivant une hyperbole, dont l'axe transverse est KR. en projection l'axe et les asympt. sont les mêmes que ceux de l'hyperbole principale.

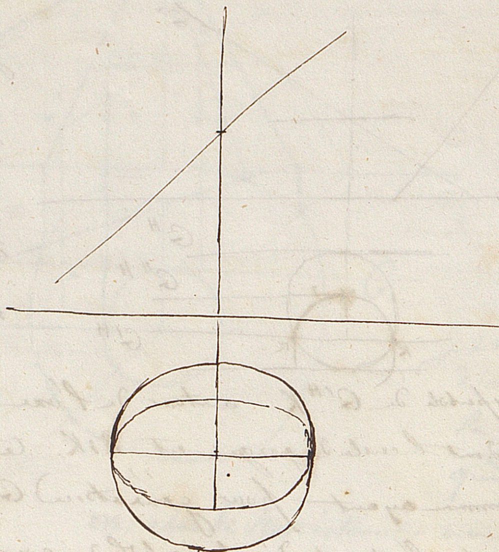
Si on fait tourner l'hyperbole de $G'^H K$ autour de l'axe imaginaire, on aura un hyperboloïde dont le cercle de gorge est RIK. cet hyperboloïde peut être considéré comme ayant pour génératrice $G''h$ et $G''v$, on voit qu'il s'agit alors de chercher l'intersect. d'un hyperboloïde avec une droite qui passe par l'axe ($G'h$, $G'v$)

Il y a un cas où la méthode semble en défaut. C'est celui où ~~la droite donnée~~ $G'h$ ne rencontrerait pas le cercle de gorge. alors on ne connaîtrait pas l'axe réel

je remplace D'h D'v par D'h, D'v. le plan D'h coupe l'hyperboloïde donné suivant une hyperbole, seule l'axe imaginaire est devenu réel et l'axe réel est devenu imaginaire.

Maintenant je chercherai l'intersection de (G) avec l'hyperboloïde (D), au lieu de chercher l'intersection de (D) avec l'hyperbole (G)





La methode s'applique aussi à un hyperboloïde défini par une asymptote et un ~~cercle de gorge~~ ellipse pour cercle de gorge.

Les sections faites par des plans horizontaux sont des ellipses semblables toutes transformables en cercles ~~[illegible]~~ en augmentant leurs ordonnées dans le même rapport. On passera donc facilement de la surface donnée à une surface de revolution, ~~on construira les intersections de la droite donnée avec la surface de revolution~~. De la droite donnée j'abaisserai de chaque point des perpend. sur la section principale et j'aurai une autre droite; je chercherai l'intersection de cette droite avec la surface de revolution, j'aurai ainsi deux points qui correspondront aux deux points d'intersection de la surface donnée. De ces deux points j'abaisserai des ~~plans~~ perpendicul. sur la section principale et je les réduirai dans le rapport constant.

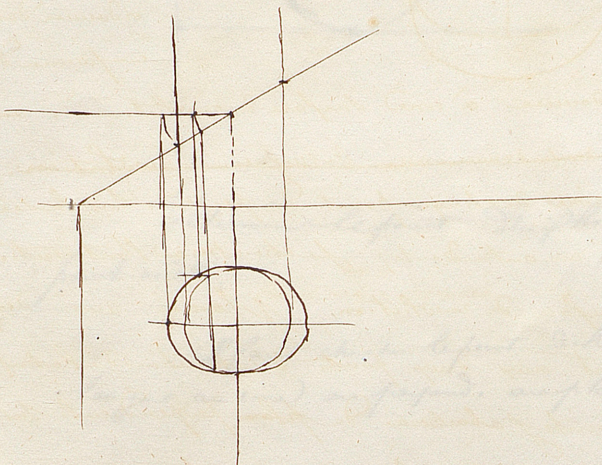
Mener un plan tangent à un hyperboloïde de revolution par une droite extérieure.

Intersection de surfaces —

Intersect. d'une surface par un plan.

Cas du cylindre. La méthode générale consiste à chercher l'intersect. du plan par chacune des génératrices de la surface.

Le cas o



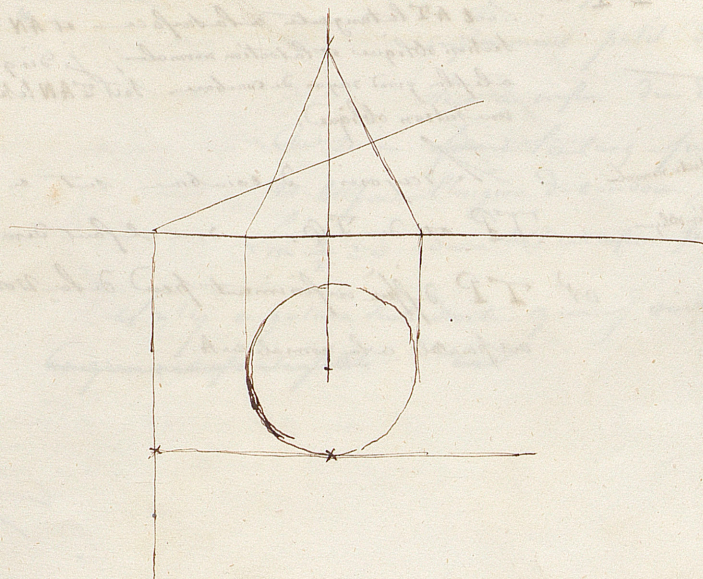
Si la courbe proposée est un cercle la courbe d'intersection sera une ellipse

tangente à cette courbe : la tang. est l'intersect. du plan tang. et du plan sécant.

Un cylindre étant coupé par un plan, on déroule la surface; il s'agit de trouver le déroulement de la courbe d'intersection.



Développement du cone



Déterminer le point d'inflexion du dévelopt. si ce point existe.

Il faut chercher le point de l'ellipse pour lequel le plan tangent au cone est perpend. au plan de l'ellipse.

La ligne la plus courte sur une surface est celle dont el qui passe par deux points voisins.

A · · B

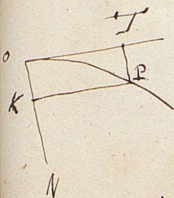
Si par les points A et B je fais passer des cercles, la différence entre l'arc et la corde est d'autant plus petite que le rayon du cercle ~~est plus petit~~ est plus grand.

La droite qui unit A et B étant la plus courte sera celle dont le rayon de courbure est le plus grand.

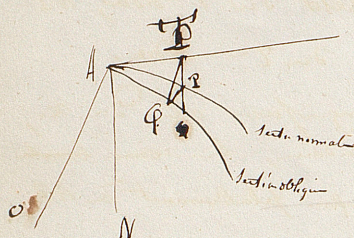
Les deux courbes, il faut supposer qu'elles ont pour tangente commune AB.

Si la courbe était un cercle on aurait absolument

$\overline{PK}^2 = PT . 2R$ d'où $R = \frac{\overline{OT}^2}{2TP}$

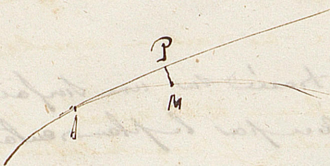


Le rayon de courbure est donc en raison inverse de PT. — Soit AT la tangente à la surface et AN normale. Je fais la section oblique et la section normale. je dis que la section normale a le plus grand rayon de courbure. Soit TAN la secti. normale ; soit TAO une section oblique.

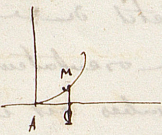


Les rayons de courbure sont en raison inverse de TP et de TQ. Donc il faut démontrer que TP < TQ.

Or TP diffère infiniment peu de la normale en P et est est parallèle à la normale en A.



quand on a une courbe et une tang. au point A. si AM est un infiniment petit du 1er ordre, AP sera un infin. du 2e ordre.

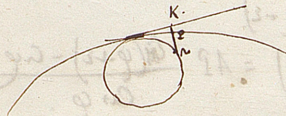


Car si on ~~prend~~ la tang. pour axe des x, et A pour l'origine des cordon., on aura ~~limite~~ $\lim \frac{y}{x} = 0$ donc MP est infin. relativement à AP.

Il n'y a qu'une seule droite qui jouisse de cette propriété.

~~[illegible]~~ — ~~car~~

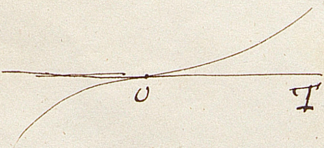




Cercle osculateur. on a le même caractère.

Parmi ces cercles il y en a qui a un contact du 2e ordre —

. prenons une courbe à double courbure et sa tang.



Si on fait tourner un plan autour de OT la distance de la courbe au plan sera au moins du 2e ordre; mais parmi ces plans il y en a un dont la distance à la courbe est un infin. petit du 3e ordre — .

Si on considère x, y, z, comme fonct. d'une variable t.

$x = \varphi(t)$
$y = \psi(t)$ — Le plan oscul. contient $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $x + d^2x$, $y + d^2y$, $z + d^2z$,
$z = \chi(t)$

Si on a une courbe tracée sur une surface, et qu'on coupe la surface par le plan osculateur à la première courbe, on aura une courbe dont la distance à la première courbe sera un infini petit du 3e ordre. Les deux courbes ont donc même cercle osculateur; car tout cercle dont la distance à l'une des courbes est un infini petit du 3e sera tel que sa distance à l'autre courbe sera un infiniment du 3e ordre.

L'arc AB sera d'autant plus petit que le rayon de courbure sera plus grand.





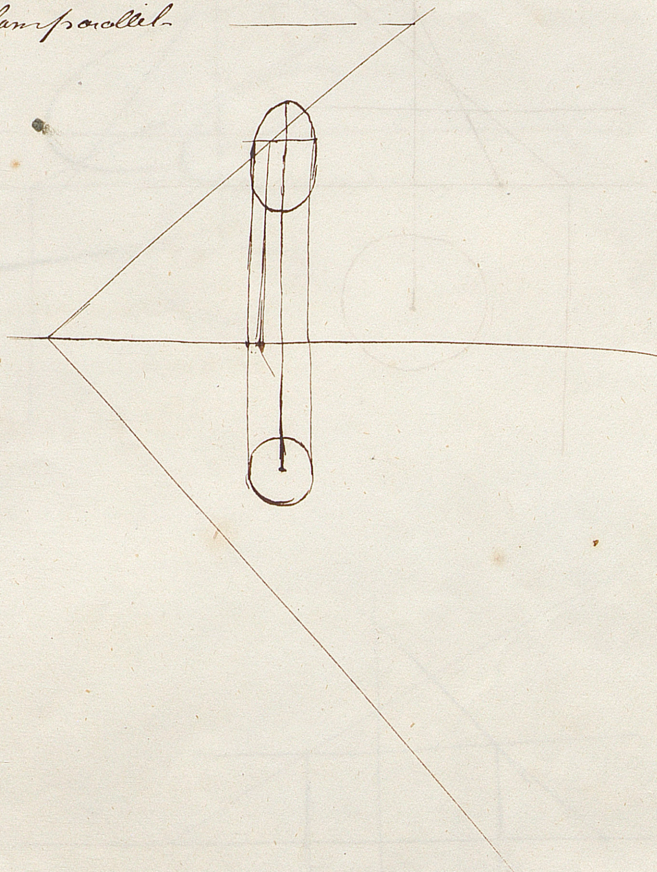
$$AM' = \frac{AP}{\cos\varphi} \qquad AM = \frac{AP}{\cos(\varphi+\varepsilon)}$$

$$AM' - AM = AP\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos(\varphi+\varepsilon)}\right) = AP\,\frac{\cos(\varphi+\varepsilon)-\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= AP\cdot\left(\cos(\varphi+\varepsilon)-\cos\varphi\right).$$

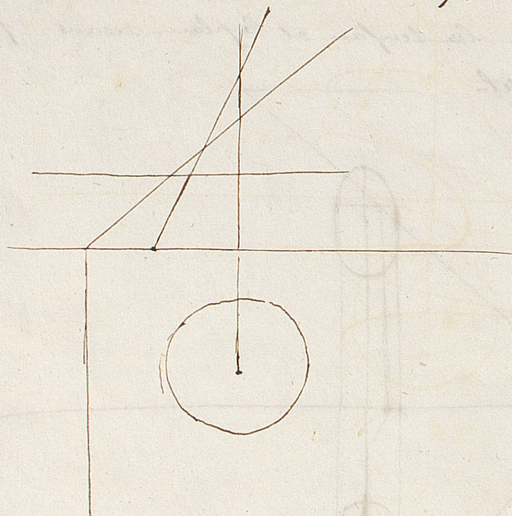
$$= AP.\ \sin\left(\varphi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

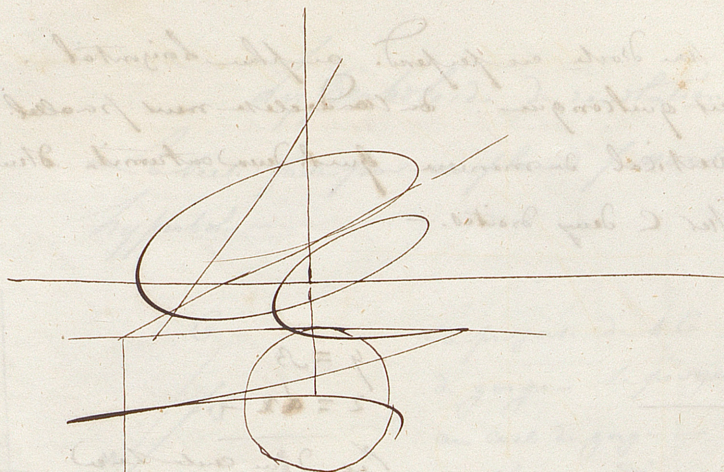
Intersect. d'une surface de révolution par un plan
on coupera la surface et le plan sécant par une série de
plans parallel. ——

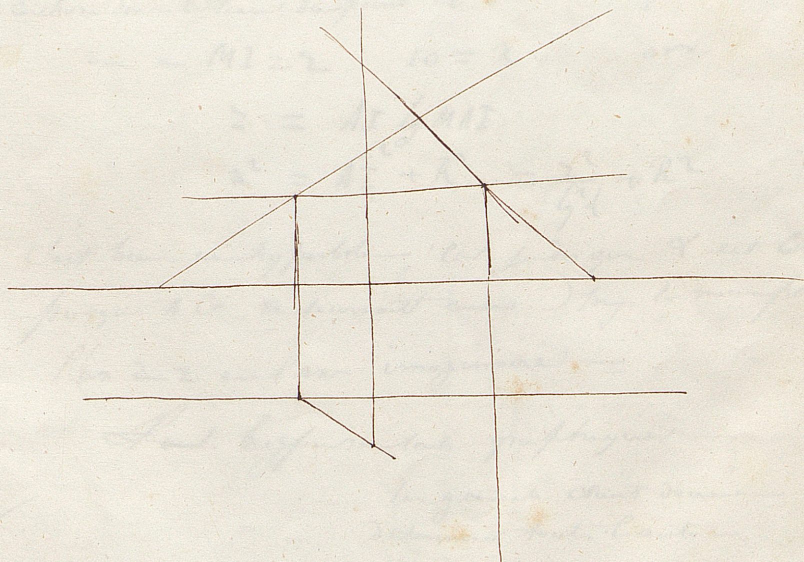


137 v

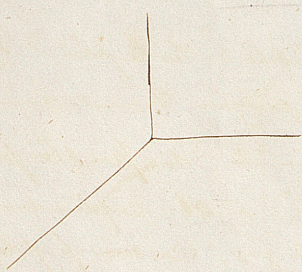
intersect. de l'hyperboloïde de revol. par un plan







Une droite est perpend. au plan horizontal. Une autre est quelconque. Un cercle se meut parallel. au plan vertical de manière que les deux extrémit. d'un diamètre soient sur les deux droites. —



$y = \beta$

$z = \alpha x$ —

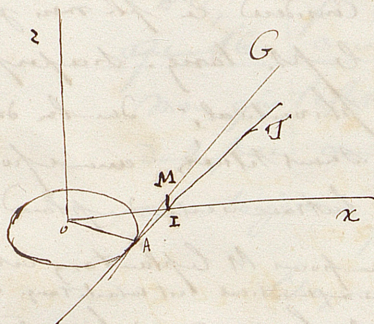
l'eq. d'un cercle sera

$z = \gamma$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$

Hyperboloïde de révolution —

La sect. faite par un plan passant par l'axe est une hyperbole —



La project. de AG sur le plan du cercle de gorge se projette suivant une tang. au cercle de gorge — 1. par AG je mène un plan perpendi. à OA, ce plan sera perpendi. au plan du cercle de gorge; (ce sera le plan projet. de AG)

Intersect. de la surface par ZOx; ce plan rencontre AG en M; cherchons donc le lieu du point M.

on a $MI = z$ $IO = x$.   or

$$z = AI \operatorname{tg} MAI.$$

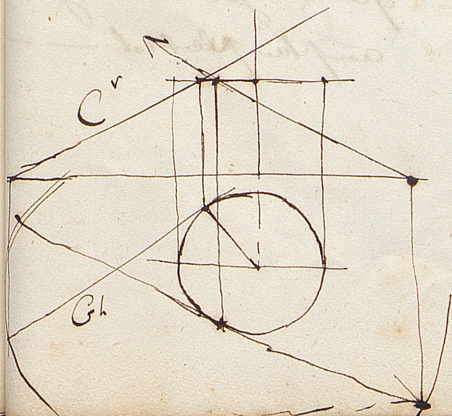
$$x^2 = \overline{AI}^2 + R^2 = \frac{z^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + R^2$$

C'est bien une hyperbole, car l'angle α est constant, puisque AG se trouvant aura toujours la même position —

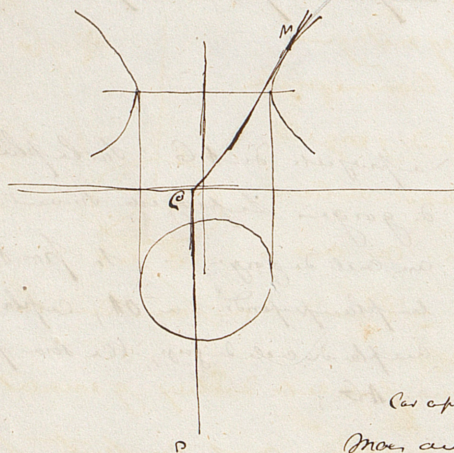
l'axe de z est l'axe imaginaire —

Toute représentat. graphique —

La génératr. étant donnée, on peut déterminer toutes hauteurs —



La génératrice en project. vertical sera toute tangente à l'hyperbole méridienne. —



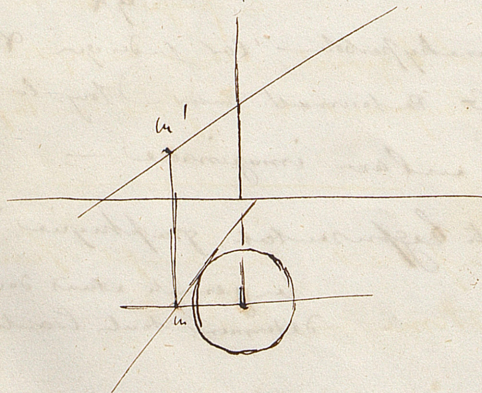
Dans un surf. de revol. le plan tang. est perpend. au pl. merid. — Si on considère le pl. meri. parallèle au vertical le pl. tang. sera perpend. au pl. vertical; donc les droites qui y seront situées auront pour proj. verticale la trace vert. du plan

au point M le plan tang. est donc MC
Car ce pl. est perpend. au plan vertical et est à la tang. au méridien.
Mais au point M la gén. qui y passe est dans le pl. tang. donc elle est dans MCD; et elle a pour project. verticale la tg. MC

La génératrice étant donnée trouver son point de contact —

Le point de contact est m, m
C'est le point où la génératrice coupe le plan méridien parallèle au plan vertical. —

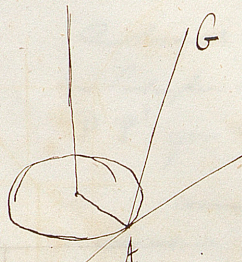
Pour l'asymptote il faut que le point de contact soit à l'infini, c'est à dire que la génératrice soit parallèle au plan vertical — —



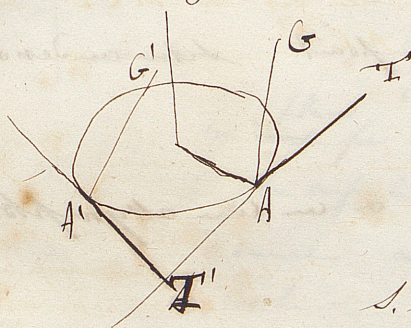
Il y a une autre serie de generatrices distinctes des precedentes —

Suppos. de AG, egal AG	une droite symetrique, elle ne fera le même angle avec le cercle de gorge

mais qui le fera en dessous au lieu de le faire au dessus. car on aura toujours $y^2 - \frac{z^2}{\frac{b^2}{a^2}} = R^2$ — on aura donc la même surface



Cherchons la projection de deux generatrices — en general d'un même systeme ne se coupent jamais



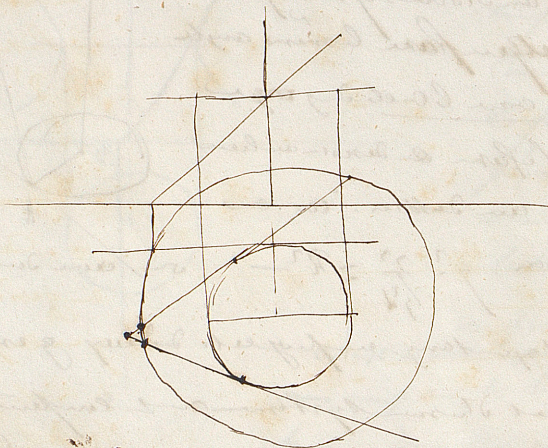
Soient deux gener. G, G'. si ces gener. sont du même systeme, les part. AG, A'G' sont situées au dessus du cercle de gorge — elles ont donc pour project. AI, et A'I' à partir des points A et A'. les project. ne se confondent jamais.

Si les generat. etaient de syst. differents, elles se couperaient en un point dont la project. est I'.

---

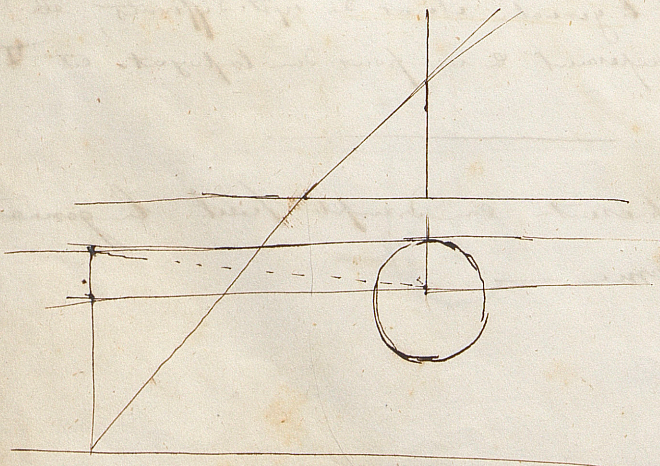
on peut representer en dessous tout les generatrices du 2e systeme —

Plan tangent.—



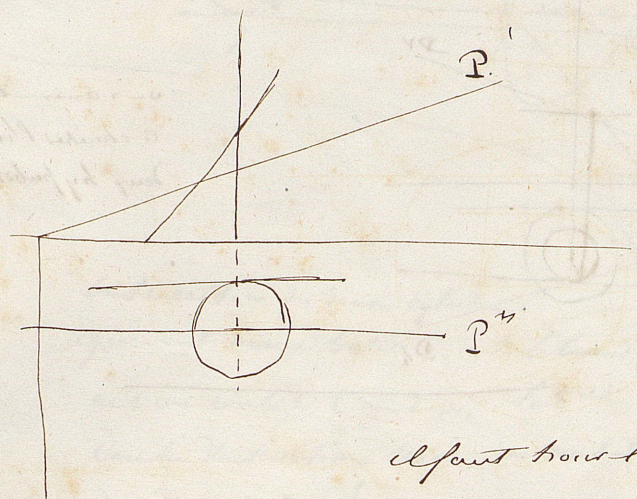
Soit la projection horizontale d'un point situé au dessous du cercle de gorge —

Cette surface a un cône asymptote.



Intersect. d'un hyperb. à ... nappe par un plan —

determiner les sommets.



Les sommets sont l'inter. de la surface avec la droite PP' qui rencontre l'axe. —

~~avant de~~

~~Chacune~~

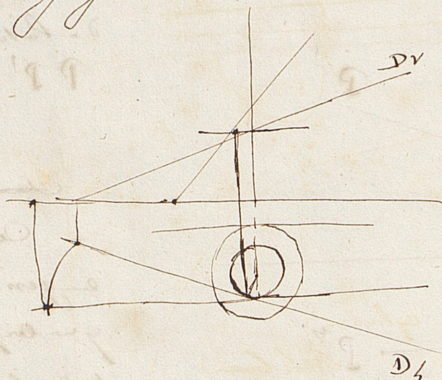
Cette droite en tournant engendrerait un cone qui coupe l'hyp. suivant le cercle sur lequel se trouve le point cherché —

Il faut trouver l'inters. de la gen. de l'hyp. avec le cone — pour cela on fait passer un ~~droite~~ plan par la droite et le sommet du cone : ~~ce qui permet~~ ce plan coupe le cone suiv. 2 gener. — qui coupent la droite donnee. ~~on peut donc connaitre~~ ce probl. a deja été resolu — — —

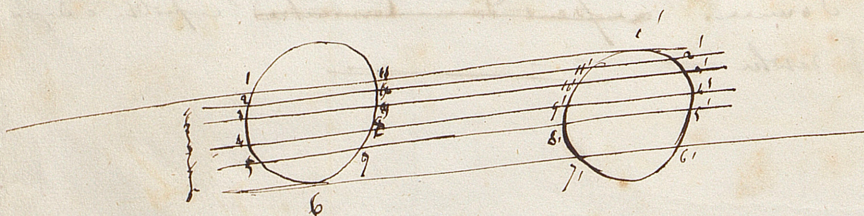
141v

intersection d'un hyperb. de revol. par une droite quelconque — —

Supp. d'abord que la proj. est horiz. Cercle de gorge —



on ramène la quest. à chercher l'intersect. de deux hyperboloïdes.



1, 1'
2, 2'
5, 5'
6, 6'
puis 7, 5'

11, 1'

puis 12, 13'

6, 7'
5, 8'



1re Courbe complète

1, 1'
2, 2
3, 3
4, 4
5, 5
6, 6
7, 7

8, 6'
9, 5'
10, 4
11, 3
12, 2
1, 1'

Intersection de deux cylindres qui ont même base. Si la base est une courbe du 2e degré; la 2e courbe d'intersection sera une courbe du deuxième degré! —

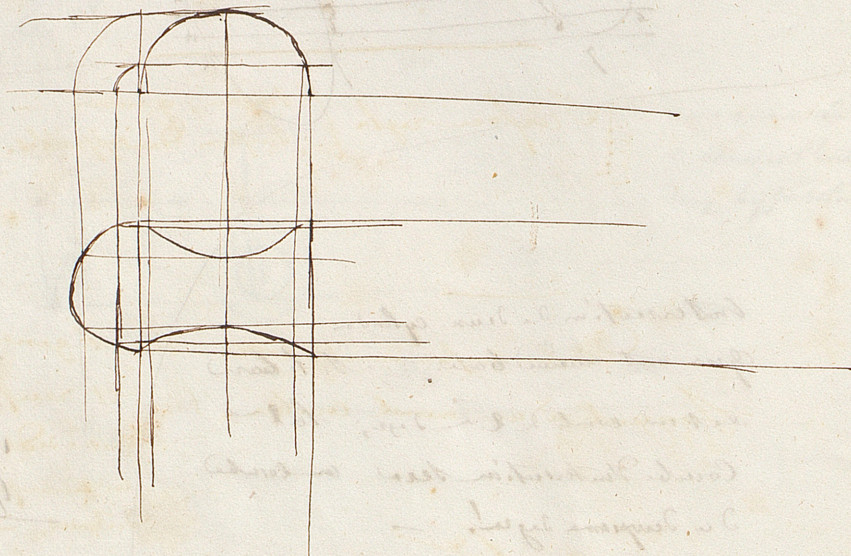
2e Courbe

1, 8

7, 14'

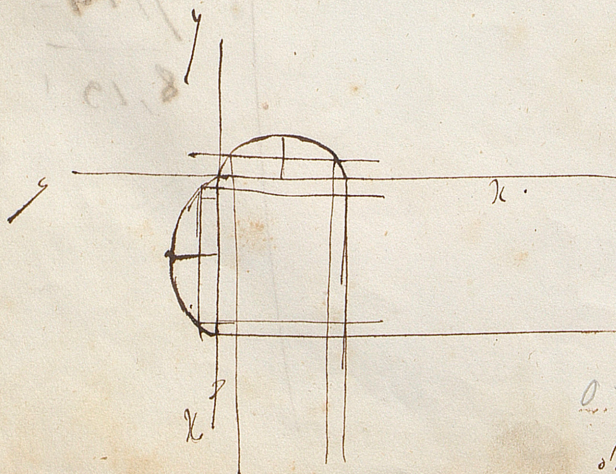
8, 13'

les deux cylindres superposées au plan vertical horizontal — leur directr. est rectangulaire



1e le plan perpendiculaire et horizontal

Suppos. que les deux bases soient deux ellipses et que les voutes aient même hauteur, les project. horizontales sont deux droites



$$a^2y^2+b'^2x^2-2ab'^2x=0$$

$$a'^2y^2+b^2x'^2-2a'b^2x'=0$$

$$y^2=\frac{2b^2}{a}x-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$y^2=\frac{2b^2}{a'}x'-\frac{b^2}{a'^2}x'^2$$

d'où

$$0=2b^2\left(\frac{x}{a}-\frac{x'}{a'}\right)+b^2\left(\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

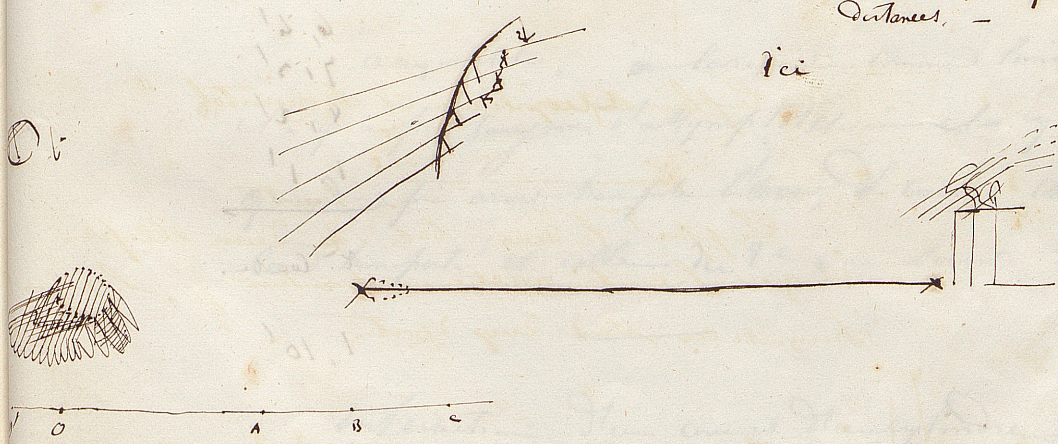
d'où $\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'}$; donc le lieu des points est une droite —

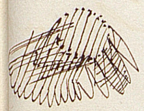
Deux cylindr. ont même base située dans le plan vertical; les génér. du 1er sont perpendicul. au plan vertical. les géner. du 2e sont une direct. qlq. —

Surface réglé { surface gauche — / surfaces développables.

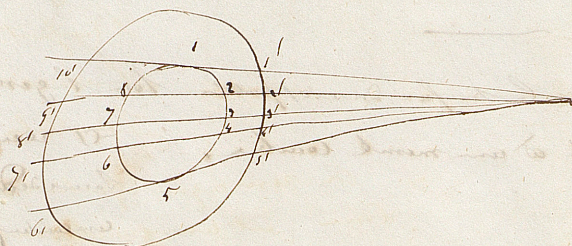
Dans la surface développable toutes les génératrices sont tangent à une même courbe. — et réciproque

Si une des générat. se font sur une courbe par les pieds des plus courtes distances. —





Intersection de deux cones. —



1, 1'

5, 5'

6, 4'

7, 3'

8, 2'

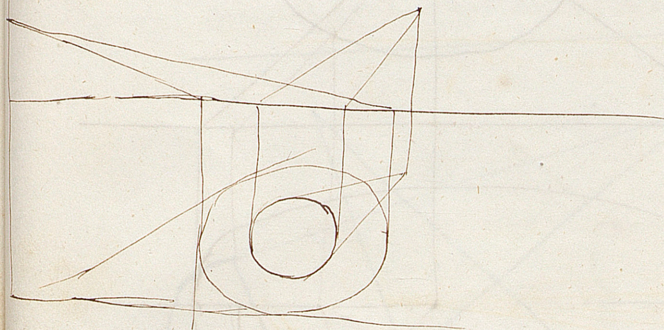
1, 1'

2e. Courbe.

1, 10'

5, 6'

La courbe d'intersect. a telle de branches infinies. — Il faut chercher s'il existe sur les cones des generatrices paralleles



Pour cela par le sommet de l'un des cones on mene des cones paralleles a l'autre : on a alors deux cones qui ont meme sommet. S'ils se coupent suivant une generatrice, et s'ils se coupent suivant une generat. les deux cones auront des generat. paralleles —

On remarque que la base du nouveau cone est une courbe semblable a

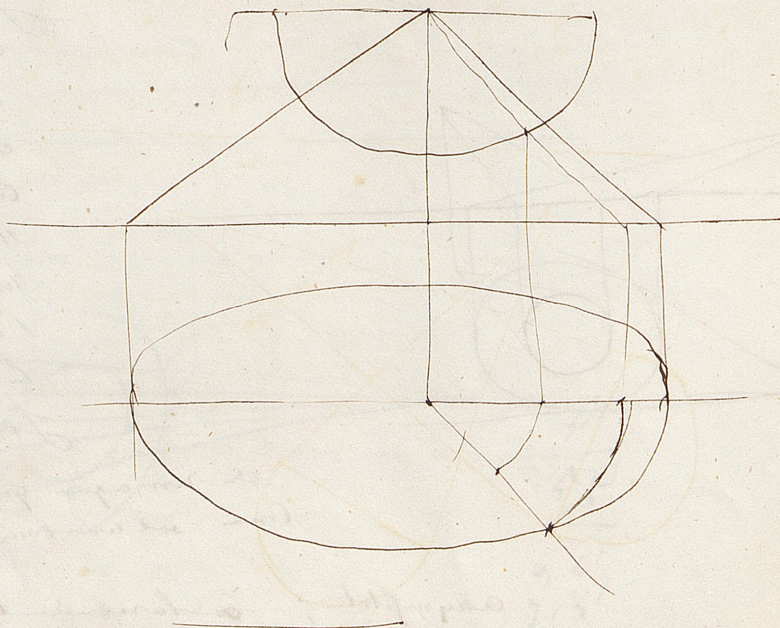
asymptote ; on la regarde comme limite des tang. Il n'y a pas toujours d'asymptotes. — Il n'y en a pas quand apres avoir transporte l'un des cones, les traces du cone transporte et celle du 2e cone seront tangentes —

Intersection d'un cone et d'un cylindre. — —

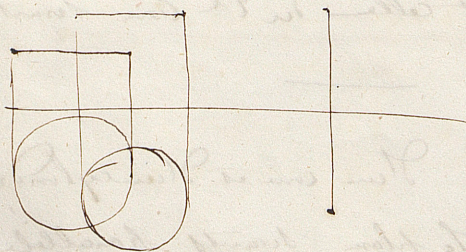
On prend des plans secants paralleles aux generatrices du cylindre et passant par le sommet du cone —

- - ——— - - - - - - - -

intersection d'une sphère et d'un cone concentrique



deux cone ayant meme sommet

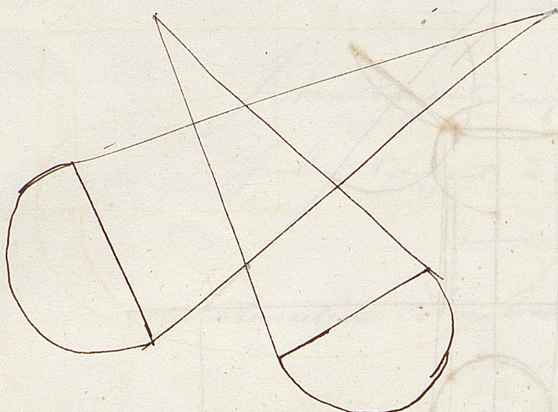


l'intersect. se reduit a deux droites.

Je ne reconnais la quest. il faut chercher l'intersect. de l'un des cone par le plan de la base de l'autre

Intersection de deux cones. —

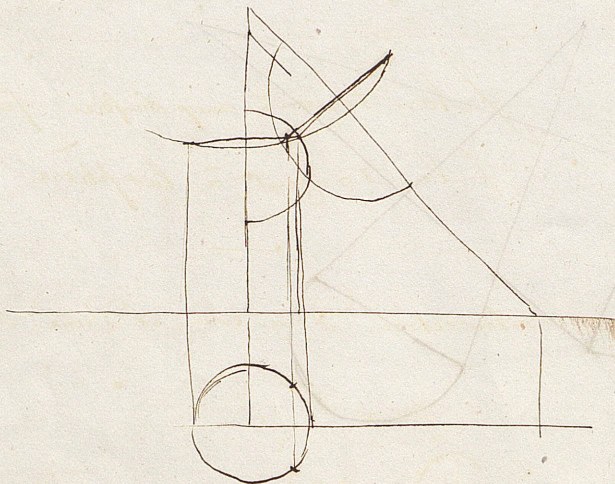
Les sommets sont situés dans le plan horizontal — et les bases sont situées dans des plans verticaux. —



145 v

Intersect. de deux surfaces de revolution — Dont les axes se rencontrent.

on coupe les deux surfaces par une sphere ayant pour centre le point de concours. elle coupera les deux surfaces suivant des cercles. il suffira des cercles dans les points d'intersect.



tang. en un point de la courbe. ici elle est perpendicul. à la normale de chacune des deux surfaces. — cherchons donc le plan qui contient les deux normales; et pour cela determinons les deux normales

(on peut remarquer que l'on connaît 3 points du plan des deux normales ce qui permet de determiner ce plan.)

---

on pourrait prendre pour plans des surfaces l'hyperbol. [illegible] de revolut. defini par sa generatrice —

La méthode est un peu changée; on cherche le parallel de l'hyperboloïde et on fait passer une sphère par ce parallel ~~et le point de rencontre des axes~~; son centre étant le point de rencontre des axes —

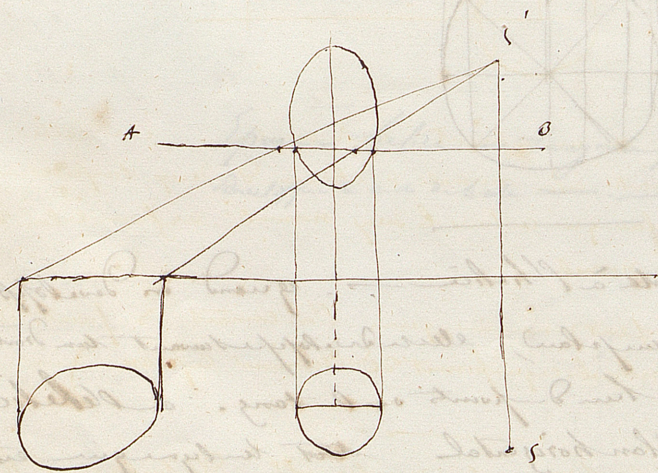
Je ... même une tangente à l'hyperbole plan des deux normales à chaque surface —

—

plan tangent aux surfaces par une droite extérieure plan tangent à la sphère —

—

Intersection d'un cone et d'une surface de révolution —



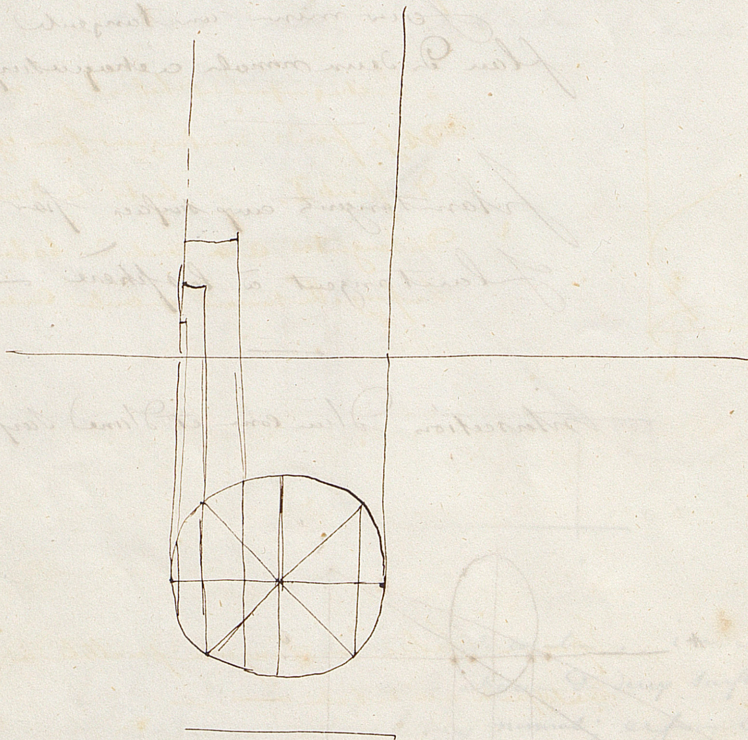
on coupe les deux surfaces par des plans perpend. à l'axe de la surf. de révolution. on coupe la surface suivant un cercle et le cône donné suivant une courbe semblable à la base — alors on considère deux cônes qui ont pour sommet (S S') le sommet du cône donné et pour base la courbe d'intersection du cône par le plan AB et ~~le~~ cercle suivant lequel le plan AB coupe la surface de révolution —. ces deux cônes se coupent suivant une droite sur laquelle se trouvent les points d'intersection —; —

même méthode pour l'intersect. d'un cylindre et d'une surface de révolution —

146 v

Helice —

construire les deux project. d'une helice —



Tangente à l'helice — . quand on developpe une helice sur un plan, elle se developpe suivant une droite.

Le lieu des points où la tang. à l'helice perce le plan horizontal est une ligne qui est le developpement du cercle —

tang. à l'helice parallele à une direction donnée.

Helicoïde developpable

Un helicoïde developpable coupé par un plan perpendiculaire à son axe suivant la developpée d'un cercle — une 2e propriété est coupée suivant des helices par des cylindres qui ont même axe qu'elle —

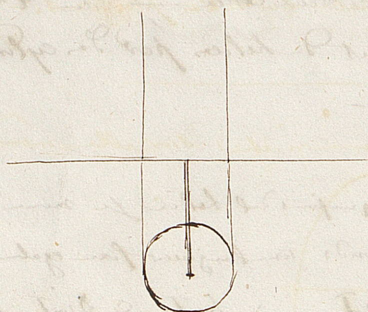


de chaque point de l'helice je mène une tangente et je prends une longueur fixe égale à PI. lieu des points I. ; toutes ces droites se projettent suivant des tangentes au cercle de base. et le point I se projette suivant un cercle concentrique au premier.

Epure — helice — tangente parallele à une droite donnée, — developpée de cercle de base —. —



Developpement de l'helicoïde —

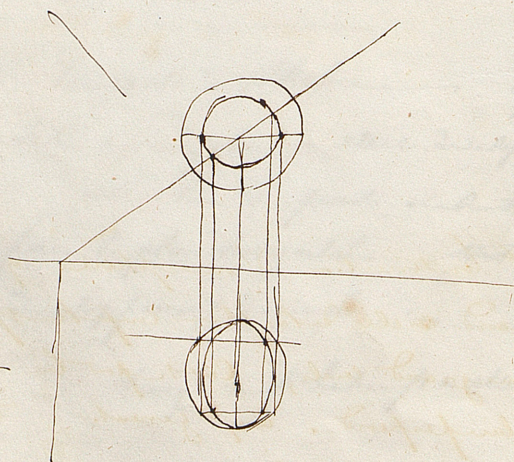


Ombre d'une sphere —

— on suppose les rayons lumineux paralleles —

On revient a circonscrire un cylindre a une sphere ;

~~nous comprendrons~~ je suppose d'abord les ray. lum. paralleles au plan vertical —

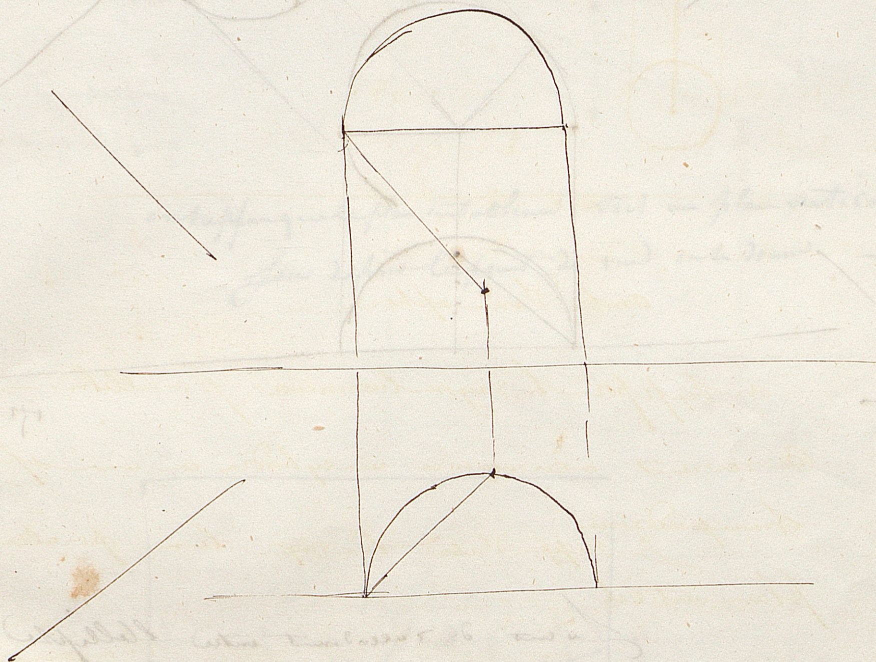


Si on mene par le centre un plan perpen au ray. lumineux ce plan coupera la sphere suivant la ligne de separ. —

ombre portee par la sphere sur le plan horiz

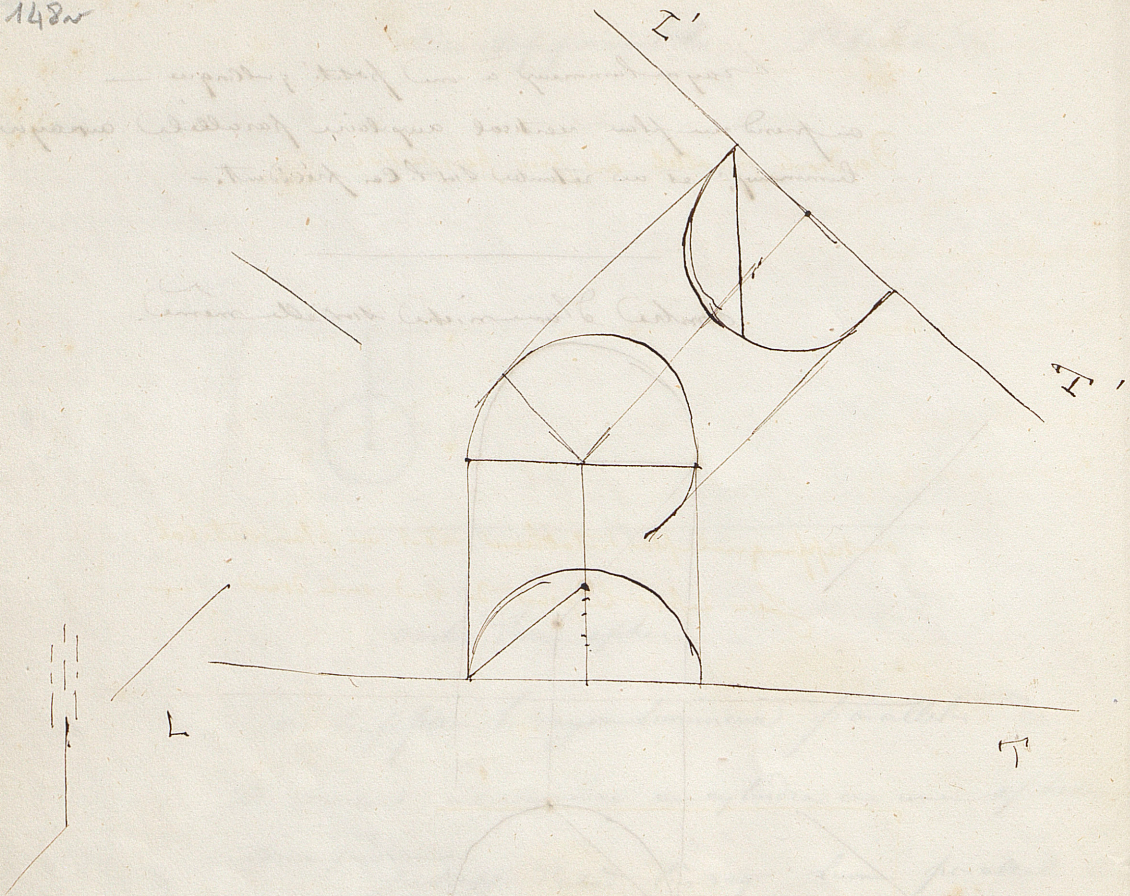
le rayon lumineux à une posit. quelconque —
on prend un plan vertical auxiliaire parallèle aux rayons lumineux, et on retombe sur le cas précédent. —

Ombre d'une niche sur elle même.



l'intersection d'une sphère et d'un ... ball. un grand cercle de la sphère coupe la sphère suivant un deuxième grand cercle, car le plan ... centre ... mène un plan perpend. aux generat., tout est symétrique par rapport à ce plan.

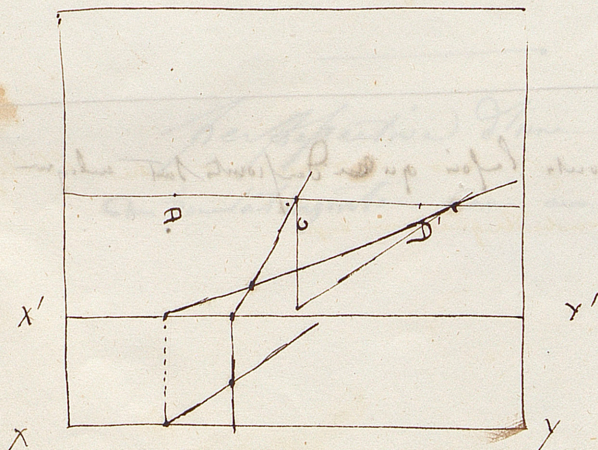
148r

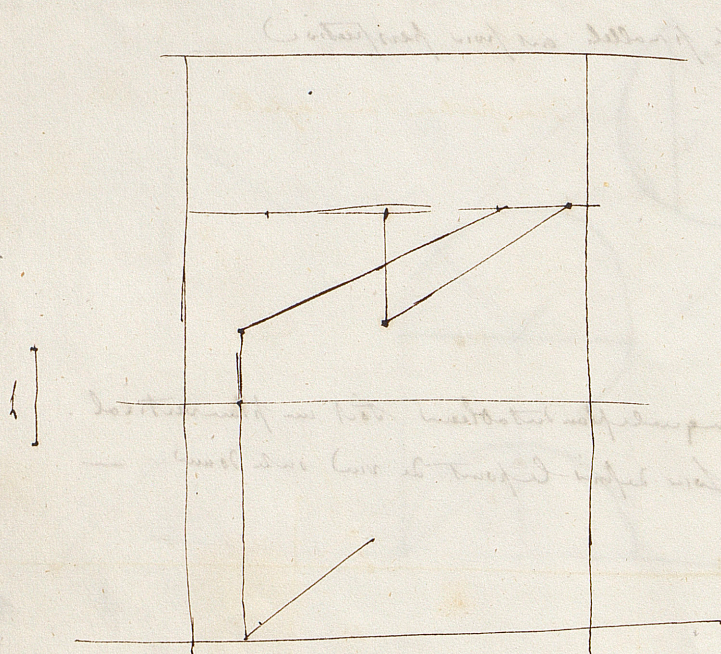


Le cas de raccordement entre l'ellipse et la courbe du quatrième degré.

Des droites parallèles ont pour perspective —

on suppose que le plan du tableau soit un plan vertical.
pour définir le point de vue on se donne —





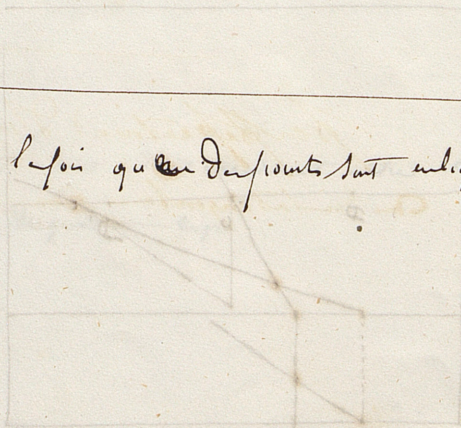
Perspective d'une droite
située dans le plan horizontal.

—

Perspective d'une droite longue

—

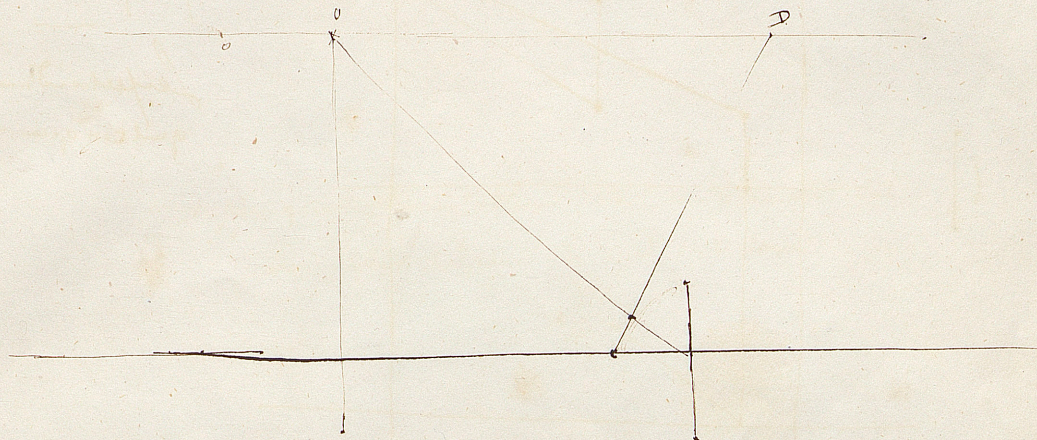
Perspective d'une droite
quelconque —



Toutes les fois que deux points sont en ligne droite,
ou que

Propriétés du cercle démontrées par la perspective.

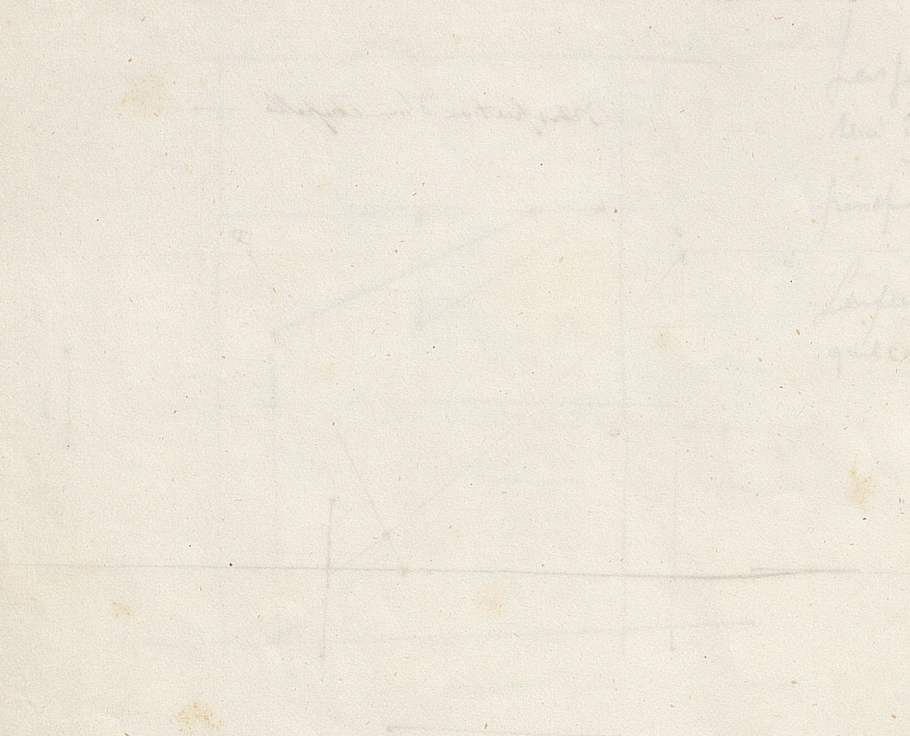
Perspective d'une chapelle —



Perspective d'une voûte d'arrête.

Construction de la tangente commune aux ellipses —





152 r

